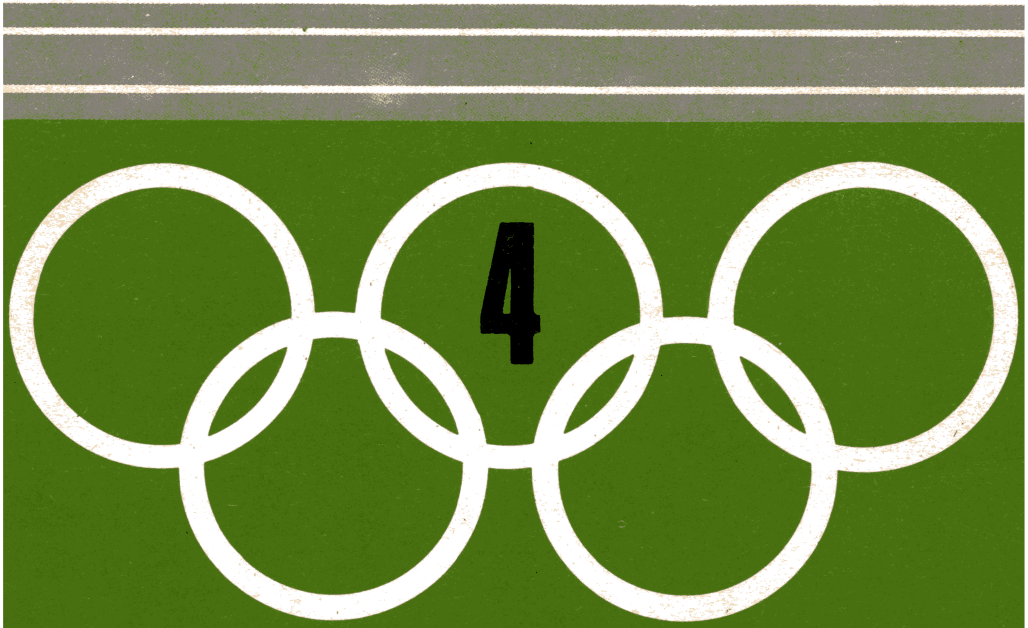
IOAN TOMESCU

PROBLEME DE COMBINATORICĂ ȘI TEORIA GRAFURILOR



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

IOAN TOMESCU

PROBLEME DE COMBINATORICĂ ŞI TEORIA GRAFURILOR

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ,
Bucureşti, 1981

Referenți: Cercet. șt. dr. Tiberiu Spircu
Prof. Ioan Maftei

Redactor: Prof. Eugenia Pantelimon
Tehnoredactor: Vergilia Rusu

Dicționar de termeni folosiți în lucrare

— Identitățile lui **Abel**: a se vedea problema 1.29.

— **Acoperire** a unei mulțimi X este o familie formată din submulțimi nevide și distincte două cîte două ale lui X, a căror reuniune este X. O acoperire A a lui X care este formată din k submulțimi se numește **ireductibilă,** dacă reuniunea oricăror k—1 submulțimi din A este o submulțime proprie a lui X.

— **Arbore:** orice graf G conex și fără cicluri.

— **Arbore parțial** al unui graf conex G: un graf parțial al lui G care este arbore.

— **Arborescență** de rădăcină a: un graf orientat cu proprietatea că în orice vîrf $x \neq a$ sosește un drum unic care pleacă din rădăcina a.

— Punct de **articulație**: un vîrf x al unui graf conex G cu proprietatea că subgraful G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x nu mai este conex.

— **Automorfism:** un izomorfism al unui graf G cu el însuși.

— **Bază** de filtru: un sistem S de submulțimi nevide ale unei mulțimi X cu proprietatea că pentru orice $A, B \in S$ există $C \in S$ astfel încît $C \subset A \cap B$.

— Numărul lui **Bell,** notat B_n, este numărul tuturor partițiilor unei mulțimi cu n elemente, deci $B_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \ldots + S(n, n)$.

— **Biacoperire** a unei mulțimi X: o familie de submulțimi nevide ale lui X, astfel încît orice element din X este conținut în exact două submulțimi ale familiei.

— **Bloc** al unui graf G: un subgraf 2-conex maximal al lui G. Oricare două blocuri ale unui graf care nu este 2-conex au în comun cel mult un vîrf, care este punct de articulație.

— **Bloc design incomplet** și **echilibrat** *(BDIE)*: a se vedea problema 4.37.

— Lema lui **Burnside:** a se vedea problema 13.2.

— Ecuație **caracteristică** a unei relații de recurență liniare: a se vedea problema 1.31.

— **Cardinalul** unei mulțimi finite X reprezintă numărul elementelor lui X și se notează $|X|$.

— Numărul lui **Catalan,** notat T_n, este numărul de moduri în care se pot pune parantezele într-un produs neasociativ de n factori, scrișI în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_n$. El are expresia $T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

— Identitățile lui **Cauchy:** a se vedea problemele 3.35 și 12.7.

— Formula lui **Cauchy:** a se vedea problema 12.6.

— Formula lui **Cayley:** numărul arborilor cu n vîrfuri notate 1, 2, ..., n este egal cu n^{n-2}.

— **Centrul** unui graf conex G este format din acele vîrfuri x_0 de excentricitate minimă, deci $e(x_0) = \min e(x) = \rho(G)$, unde $\rho(G)$ este **raza** grafului G.

— **Ciclu:** pentru un graf neorientat G un lanț $L = [x_0, x_1, \ldots, x_r]$ cu proprietatea că $x_0 = x_r$ și toate muchiile $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{r-1}, x_r]$ sînt distincte două cîte două se numește ciclu.
Dacă toate vîrfurile ciclului, cu excepția primului și a ultimului vîrf care coincid, sînt distincte două cîte două, ciclul se numește **elementar. Lungimea** unui ciclu este egală cu numărul muchiilor pe care le conține.

— **Circuit:** pentru un graf orientat G un drum $D = (x_0, \ldots, x_r)$ cu proprietatea că $x_0 = x_r$ și toate arcele $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{r-1}, x_r)$ sînt distincte două cîte două se numește circuit.
Dacă toate vîrfurile circuitului, cu excepția primului și a ultimului vîrf care coincid, sînt distincte două cîte două, circuitul se numește **elementar. Lungimea** unui circuit este egală cu numărul arcelor pe care le conține.

— **Ciclu (circuit) eulerian** al unui graf G: un ciclu (circuit) care folosește toate muchiile (arcele) grafului G.

— **Ciclu (circuit) hamiltonian**: ciclu (circuit) elementar care conține toate vîrfurile grafului.

— **Clică:** subgraf complet al unui graf.

— k-**colorare** a unui graf $G = (X, U)$ este fie o partiție $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ a mulțimii vîrfurilor, astfel încît oricare două vîrfuri din aceeași clasă să nu fie adiacente, fie o funcție

$$f : U \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

astfel încît $[i, j] \in U$ să implice $f(i) \neq f(j)$, distincția dintre aceste două noțiuni fiind dată explicit în text.

— **Combinări** de n luate cîte k se notează prin $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ și reprezintă numărul de moduri de a alege k obiecte dintr-o mulțime cu n obiecte. Prin definiție $\binom{n}{k} = 1$ pentru $k = 0$ și $n \geqslant 0$ și $\binom{n}{k} = 0$ pentru $n < k$. Uneori aceeași notație se utilizează pentru n rațional sau $n < 0$, specificîndu-se acest lucru în text.

— **Combinări cu repetiție** de n luate cîte k reprezintă numărul cuvintelor crescătoare de lungime k formate cu litere din alfabetul A cu n litere, pentru care s-a definit o ordine totală, adică numărul cuvintelor de forma $c_1 c_2 \ldots c_k$, unde $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k$ și $c_i \in A$ pentru $1 \leqslant i \leqslant k$. Expresia combinărilor cu repetiție de n luate cîte k este $\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}$. Numărul cuvintelor strict crescătoare de lungime k cu litere din A este combinări de n luate cîte k, adică $\binom{n}{k}$.

— **Complementarul** unui graf $G = (X, U)$ este un graf notat $\bar{G} = (X, \bar{U})$ cu aceeași mulțime X de vîrfuri, două vîrfuri fiind adiacente în $\bar{G}$ dacă și numai dacă ele nu sînt adiacente în G.

— (v, k, λ) — **configurație:** a se vedea problema 4.38.

— **Indicele cromatic** $q(G)$ este numărul minim de culori cu care pot fi colorate muchiile grafului G, în așa fel încît oricare două muchii cu o extremitate comună să fie colorate cu culori diferite.

— **Număr cromatic** $\chi(G)$ al unui graf G este numărul minim de culori cu care pot fi colorate vîrfurile lui G, astfel încît oricare două vîrfuri adiacente să aibă culori diferite.

— **Cuplaj** al unui graf: o mulțime de muchii care nu au două cîte două extremități comune. Numărul maxim de muchii ale unui cuplaj pentru un graf G se notează prin $\nu(G)$.

— **Diagramă Ferrers** asociată partiției întregului n de forma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, este un tabel cu n celule, care conține pe prima linie n_1 celule, pe a II-a linie n_2 celule,..., pe linia k n_k celule, celulele fiind desenate unele sub altele și aliniate la stînga. O diagramă Ferrers este simetrică dacă în linia i și în coloana i sînt un același număr de celule, pentru orice $i \geqslant 1$, deci simetria se referă la diagonala principală a diagramei.

— **Diametrul** unui graf conex G: distanța maximă între perechile de vîrfuri ale lui G, care se notează $d(G)$.

— **Diferența simetrică** a mulțimilor A și B se notează $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

— **Distanța** între vîrfurile x și y ale unui graf neorientat și conex G se notează $d(x, y)$ și reprezintă lungimea minimă a lanțurilor dintre x și y în G.

— Formula lui **Dixon**: a se vedea problema 1.8.

— **Drum:** pentru un graf orientat $G = (X, U)$, un șir de vîrfuri $D = (x_0, x_1, \ldots, x_r)$ cu proprietatea că $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{r-1}, x_r) \in U$, deci sînt arce ale grafului. Vîrfurile x_0 și x_r se numesc **extremitățile** drumului D. **Lungimea** unui drum este dată de numărul de arce pe care le conține. Dacă vîrfurile $x_0, x_1, \ldots, x_r$ sînt distincte două cîte două, drumul D este elementar.

— Teorema lui **Erdös-Ko-Rado**: a se vedea problema 4.22.

— Formula lui **Euler** pentru un graf planar G: dacă G are n vîrfuri și m muchii și este conex, orice reprezentare planară a sa conține $m - n + 2$ fețe.

— Funcția lui **Euler** $\varphi(n)$: reprezintă numărul întregilor pozitivi mai mici ca n și primi cu n. Dacă descompunerea lui n în factori primi conține factorii primi distincți doi cîte doi $p_1, \ldots, p_q$, atunci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_q}\right).$$

— Identitățile lui **Euler**: a se vedea problemele 1.37 (sau 2.9) și 5.6.

— Teorema pentagonală a lui **Euler**: relația de recurență a numerelor $P(n)$ ale partițiilor unui întreg n, dată de problema 5.8.

— **Excentricitatea** unui vîrf x al unui graf conex: se notează $e(x) = \max_y d(x, y)$, unde $d(x, y)$ este distanța dintre vîrfurile x și y.

— **Față** a unei reprezentări plane a unui graf planar G: o componentă conexă a planului, obținută prin suprimarea din plan a muchiilor și vîrfurilor reprezentării plane a lui G. Frontiera oricărei fețe este o curbă Jordan închisă, constînd din muchiile unui ciclu elementar al grafului G. Fața infinită este singura componentă conexă nemărginită obținută în acest mod.

— Numerele lui **Fibonacci**, notate F_n, se definesc prin $F_0 = F_1 = 1$ și $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pentru orice $n \geqslant 0$.

— **Flux** într-o rețea de transport: a se vedea problema 9.18.

— Algoritmul lui **Ford-Fulkerson**: a se vedea problema 9.20.

— **Teorema lui Ford-Fulkerson:** în orice rețea de transport valoarea maximă a fluxului la ieșire este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi (problema 9.19).

— **Numărul lui Gauss,** notat $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, se definește ca numărul subspațiilor de dimensiune k ale unui spațiu vectorial n-dimensional peste un corp finit cu q elemente, unde q este o putere a unui număr prim. Expresia lui este dată de problema 3.33.

— **Funcție generatoare** asociată unui șir de numere (a_n) este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; **funcția generatoare exponențială** a numerelor a_n are expresia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$. Aceste serii sînt considerate serii formale cărora li se aplică operații algebrice, ca și unor polinoame cu un număr suficient de mare de termeni, fără a se studia convergența lor. În general, funcțiile generatoare utilizate sînt definite de serii care sînt convergente pe R sau pe intervale de lungime strict pozitivă ale lui R, însă demonstrația convergenței lor nu va fi dată în această lucrare. Dezvoltările în serie utilizate în această lucrare se referă la dezvoltarea lui e^x, $\ln(1 + x)$, formula generalizată a binomului lui Newton și suma progresiei geometrice infinite.

— **Grad** al unui vîrf x: 1) pentru un graf neorientat G gradul vîrfului x, notat $d(x)$, este numărul muchiilor incidente cu x; 2) dacă G este un graf orientat, gradul de intrare al vîrfului x, notat $d^-(x)$, este numărul arcelor care intră în vîrful x, de forma (y, x); gradul de ieșire al vîrfului x, notat $d^+(x)$, este numărul arcelor de forma (x, z), care ies din vîrful x, iar gradul vîrfului x este $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

— **Graf:** 1) un **graf neorientat** G este o pereche ordonată de mulțimi (X, U), unde X este o mulțime finită, numită mulțimea **vîrfurilor** sau a **nodurilor,** iar U este formată din perechi neordonate de elemente distincte din X, numite **muchii.** O muchie fiind notată $[x, y]$, vîrfurile x și y se numesc **extremitățile** acestei muchii. Dacă $[x, y] \in U$, se spune că vîrfurile x și y sînt **adiacente** în graful G, iar vîrfurile x și y sînt **incidente** cu muchia $[x, y]$; 2) un **graf orientat** G este o pereche ordonată de mulțimi (X, U), unde X se numește mulțimea **vîrfurilor** sau a **nodurilor,** iar U este formată din perechi ordonate de elemente distincte din X, numite **arce.** Un arc fiind notat $u = (x, y)$, vîrful x este **extremitatea inițială,** iar vîrful y este **extremitatea finală** a arcului u, care se spune că este orientat de la x, spre y. Dacă $(x, y) \in U$, vîrfurile x și y sînt **adiacente** în G și amîndouă sînt **incidente** cu arcul (x, y).

Un **graf parțial** al unui graf $G = (X, U)$ este un graf $G_1 = (X, V)$ unde $V \subset U$, deci este graful G însuși sau se obține din G prin suprimarea anumitor muchii (arce).

Un **subgraf** al unui graf G este un graf $H = (Y, V)$, unde $Y \subset X$, iar muchiile (arcele) din V sînt toate muchiile (arcele) din U care au ambele extremități în mulțimea de vîrfuri Y. Deci un subgraf H al lui G, **indus** sau **generat** de mulțimea de vîrfuri Y se obține din G prin suprimarea tuturor vîrfurilor din $X \setminus Y$ și a tuturor arcelor incidente cu acestea.

— **Graf bipartit:** este un graf $G = (X, U)$ pentru care există o partiție a mulțimii vîrfurilor $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, astfel încît fiecare muchie u a grafului are o extremitate în A și cealaltă în B. Un graf bipartit se

numește *complet* dacă el conține toate muchiile $[a, b]$, unde $a \in A$ și $b \in B$. Dacă $|A| = p$ și $|B| = q$ graful bipartit complet se notează $K_{p,q}$.

— **Graf complet** cu n **vîrfuri** este graful notat K_n care are $\binom{n}{2}$ muchii, deci pentru care oricare două vîrfuri sînt adiacente.
Graful complet cu o infinitate numărabilă de vîrfuri se notează K_∞. Un graf orientat este complet dacă oricare două vîrfuri diferite x și y sînt adiacente, fie prin arcul (x, y), fie prin (y, x), fie prin ambele arce (x, y) și (y, x). Graful complet notat K_n^* are $n(n-1)$ arce, deci între oricare două vîrfuri distincte x și y există ambele arce (x, y) și (y, x).

— **Graf conex** este un graf G cu proprietatea că oricare două vîrfuri sînt extremitățile unui lanț al lui G; dacă G nu este conex, el admite cel puțin două **componente conexe,** care sînt subgrafuri conexe maximale, disjuncte două cîte două relativ la vîrfuri.
Un graf G este *k-conex* dacă G are cel puțin $k+1$ vîrfuri, este conex și prin suprimarea oricărei mulțimi de vîrfuri Y de cardinal $|Y| \leqslant k-1$, graful astfel obținut este conex.

— **Graf tare conex:** este un graf orientat G cu proprietatea că pentru oricare două vîrfuri x și y există un drum $D_1 = (x,\ldots,y)$ și un drum $D_2 = (y,\ldots,x)$ în G.

— **Graf k-colorabil:** este un graf G cu numărul cromatic $\chi(G) \leqslant k$, deci un graf ale cărui vîrfuri pot fi colorate cu k culori astfel încît oricare două vîrfuri adiacente să aibă culori diferite.

— **Graf k-cromatic:** este un graf G cu numărul cromatic $\chi(G) = k$.

— **Graf hamiltonian:** graf neorientat care conține un ciclu hamiltonian sau un graf orientat care conține un circuit hamiltonian.

— **Grafuri izomorfe:** grafurile $G = (X, U)$ și $H = (Y, V)$ sînt izomorfe dacă există o bijecție $f : X \to Y$, astfel încît $[x, y] \in U$ dacă și numai dacă $[f(x), f(y)] \in V$.

— **Graf multipartit:** este un graf $G = (X, U)$ care admite o partiție a mulțimii vîrfurilor $X = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, astfel încît fiecare muchie să aibă extremitățile în două clase distincte ale partiției. Graful multipartit este **complet** dacă oricare pereche de vîrfuri situate în clase diferite ale partiției formează o muchie.

— **Graf planar:** este un graf G ale cărui vîrfuri se pot reprezenta prin puncte în plan și ale cărui muchii se pot reprezenta prin arce de curbă Jordan care unesc perechi de puncte care corespund extremităților fiecărei muchii, astfel încît oricare două arce de curbă au în comun cel mult un punct extremitate.

— **Graf k-regulat:** un graf neorientat pentru care fiecare vîrf x are gradul $d(x) = k$, sau un graf orientat cu proprietatea că $d^-(x) = d^+(x) = k$ pentru orice vîrf x.

— **Graf-stea:** un graf bipartit complet de forma $K_{1,p}$.

— **Graf-turneu:** un graf orientat complet și antisimetric, deci între oricare două vîrfuri $x \neq y$ există unul și numai unul din arcele (x, y) și (y, x).

— **Grosimea** unui graf G, notată $g(G)$, este cea mai mică lungime a unui ciclu elementar al grafului G.

— Mulțime **independentă (intern stabilă)** de vîrfuri: o submulțime de vîrfuri care induce un subgraf format din vîrfuri izolate.

— Număr de **independență** al unui graf G, notat $\alpha(G)$, este numărul maxim de vîrfuri dintr-o mulțime independentă a lui G.

— **Inversiune** a unei permutări $p \in S_n$: o pereche $\{p(i), p(j)\}$ cu proprietatea că $1 \leqslant i < j \leqslant n$ și $p(i) > p(j)$.

— Teorema lui **König**: a se vedea problema 9.23.

— **Lanț**: 1) pentru un graf neorientat $G = (X, U)$ este un șir de vîrfuri $L = [x_0, x_1, ..., x_r]$ cu proprietatea că oricare două vîrfuri vecine sînt adiacente, adică $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{r-1}, x_r] \in U$. Vîrfurile x_0 și x_r se numesc extremitățile lanțului L, iar r este **lungimea** acestui lanț. Dacă vîrfurile $x_0, x_1, ..., x_r$ sînt distincte două cîte două, lanțul L se numește **elementar.**

2) dacă G este un graf orientat, un lanț $L = [u_1, u_2, ..., u_p]$ este un șir de arce, cu proprietatea că oricare două arce vecine u_i și u_{i+1} au o extremitate comună pentru orice $1 \leqslant i \leqslant p - 1$. Extremitatea lui u_1 care nu este comună cu u_2 și extremitatea lui u_p care nu este comună cu u_{p-1} se numesc **extremitățile lanțului** L.

3) Un lanț al unei mulțimi parțial ordonate X este o submulțime total ordonată a lui X.

— **Lanț (drum) hamiltonian:** un lanț (drum) elementar al unui graf care conține toate vîrfurile grafului.

— Formula lui **Li-Jen-Shu:** a se vedea problema 1.5.8).

— Numerele lui **Lucas,** notate L_n, se definesc astfel: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ pentru orice $n \geqslant 0$.

— Formula de inversiune a lui **Moebius:** a se vedea problema 2.19.

— Funcția lui **Moebius:** a se vedea problema 2.17.

— **Multigraf:** dacă în definiția unui graf $G = (X, U)$ mulțimea muchiilor se înlocuiește printr-o mulțime multiplă, se obține un multigraf. Un multigraf poate conține deci mai multe muchii avînd aceleași extremități.

— Număr **multinomial:** este numărul $\binom{n}{n_1, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_p!}$, unde $n_1, \ldots, n_p \geqslant 0$ și $n_1 + \ldots + n_p = n$. Pentru $p = 2$ se regăsește numărul binomial $\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$. Dacă $n_1 + \ldots + n_p \neq n$, numărul multinomial se definește ca fiind egal cu zero.

— Formula **multinomului**: a se vedea problema 1.16.

— **Mulțime multiplă** X sau **colecție** de tipul $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$ este o mulțime X împreună cu o partiție a sa de tipul $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$, adică conținînd k_1 clase cu un element, k_2 clase cu două elemente, ..., k_n clase cu n elemente, pentru care se identifică elementele aparținînd unei aceleiași clase cu p elemente, pentru orice $2 \leqslant p \leqslant n$.

— Formula generalizată a binomului lui **Newton**: $(x + a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} a^{\alpha-2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} x^k + \ldots$, unde $a > 0$, serie care este convergentă pentru orice α număr real și x număr real astfel încît $|x| < a$. Dacă α este număr întreg și pozitiv, se regăsește formula binomului lui Newton.

— Formula lui **Nörlund:** a se vedea problema 3.2 b).

— **Orbite** ale unui grup de permutări: dacă $G \subset S_n$ este un grup de permutări ale mulțimii $X = \{1, ..., n\}$ și $x, y \in X$, se spune că x este **echivalent**

cu y relativ la grupul G, dacă există o permutare $f \in G$ astfel încît $y = f(x)$. Clasele acestei relații de echivalență se numesc orbitele grupului G.

— **Partiție:** 1) a unei mulțimi X, este o scriere a lui X sub forma: $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, unde mulțimile nevide $A_1, \ldots, A_k$ sînt două cîte două disjuncte și se numesc clasele partiției. Într-o partiție nu contează ordinea de scriere a claselor și nici ordinea elementelor în fiecare clasă; o partiție este de **tipul** $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$ dacă conține k_1 clase cu un element, k_2 clase cu două elemente,..., k_n clase cu n elemente; 2) a unui întreg n, este o scriere a lui n sub forma: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, unde numerele naturale $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se numesc **părțile** partiției și verifică inegalitățile: $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 1$.
Numărul partițiilor lui n cu k părți se notează prin $P(n, k)$, iar numărul tuturor partițiilor lui n se notează $P(n)$.

— **Permanentul** unei matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ se notează prin per (A) și are expresia: $\operatorname{per}(A) = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \ldots a_{np(n)}$.

— **Permutare** a mulțimii $X = \{1, \ldots, n\}$ este o bijecție $p : X \to X$, care se scrie fie $p(1)\, p(2) \ldots p(n)$, fie sub forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$. O permutare este de **tipul** $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$ dacă conține k_1 cicluri cu un element, k_2 cicluri cu două elemente,..., k_n cicluri cu cîte n elemente, unde $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Orice permutare se scrie în mod unic, dacă facem abstracție de ordinea factorilor, ca un produs de cicluri care nu au elemente comune, unde produsul este compunerea funcțiilor.

— **Permutare circulară** sau **ciclică** a r elemente: o permutare din S_n care are un singur ciclu de lungime r, restul de $n-r$ cicluri fiind de lungime unu, deci o permutare de tipul $1^{n-r} r^1$.

— **Permutări conjugate:** permutările $s, t \in S_n$ sînt conjugate dacă există $g \in S_n$ astfel încît $s = gtg^{-1}$, sau echivalent, dacă s și t au o aceeași structură de cicluri.

— Graful lui **Petersen:** a se vedea fig. 8.3.

— **Polinom cromatic** al unui graf: a se vedea problema 10.14.

— **Polinom indicator de cicluri** al unui grup de permutări $G \subset S_n$: polinomul de n variabile $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} \ldots x_n^{\lambda_n(g)}$, unde $\lambda_i(g)$ este numărul ciclurilor de lungime i ale lui g pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

— Teorema lui **Pólya:** a se vedea problema 13.6.

— **Principiul includerii și al excluderii:** a se vedea problema 2.2.

— Codul lui **Prüfer** asociat unui arbore: a se vedea problema 6.15.

— Numărul lui **Ramsey** cu doi parametri, notat $R(p, q)$, este cel mai mic număr întreg t cu proprietatea că orice graf complet cu t vîrfuri conține fie un subgraf complet cu p vîrfuri, fie o mulțime independentă cu q vîrfuri.

— **Raza** unui graf conex G este minimul excentricităților vîrfurilor sale.

— **Rețea de transport:** a se vedea problema 9.18.

— Numărul lui **Schur** se notează $S(k)$ și reprezintă numărul maxim r cu proprietatea că mulțimea $\{1, \ldots, r\}$ poate fi partiționată în k submulțimi, eventual vide, cu proprietatea că nici una dintre ele nu conține numerele x, y, z astfel încît $x + y = z$.

— **Sistem de reprezentanți distincți** *(SRD)* al unei familii de mulțimi: o familie de submulțimi $M(S) = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ ale unei mulțimi S admite un *SRD* dacă există o funcție injectivă $f : \{S_1, ..., S_m\} \to S$, astfel încît $f(S_i) \in S_i$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$.

— Teorema lui **Sperner**: a se vedea problema 4.21.

— Sistem **Steiner**: Dacă X este o mulțime cu $v \geqslant 3$ elemente, $v \equiv 1$ sau $v \equiv 3 \pmod 6$, un sistem Steiner de ordinul v este o familie de submulțimi cu trei elemente ale lui X, numite și triplete, astfel încît fiecare submulțime cu două elemente a lui X să fie conținută într-un singur triplet.

— Numărul lui **Stirling** de prima speță, notat $s(n, k)$, este coeficientul lui x^k din dezvoltarea $x(x-1) \ldots (x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^k$.

— Numărul lui **Stirling** de speța a II-a, notat $S(n, k)$, este numărul partițiilor unei mulțimi cu n elemente în k clase.

— **Suport** sau **mulțime transversală** a muchiilor unui graf: o mulțime S de vîrfuri cu proprietatea că orice muchie are cel puțin o extremitate în S. Cardinalul minim al unui suport pentru un graf G se notează prin $\tau(G)$.

— Numărul **surjecțiilor** $f : X \to Y$, unde $|X| = m$ și $|Y| = n$ se notează $s_{m,n}$.

— **Tăietură** a unei rețele de transport $G = (X, U, c)$ cu intrarea a și ieșirea b: mulțimea arcelor $\omega^-(A) = \{(x, y) \mid x \notin A, y \in A\}$, unde $A \subset X$, $a \notin A$ și $b \in A$. **Capacitatea** tăieturii $\omega^-(A)$ este suma capacităților arcelor din $\omega^-(A)$.

— **(a, b)-tăietură** a unui graf orientat G este o mulțime C de arce cu proprietatea că orice drum de la vîrful a la vîrful b $(a \neq b)$, conține cel puțin un arc din C.

— **Transpoziție:** permutare $g \in S_n$ care are $n-2$ puncte fixe, deci este de tipul $1^{n-2}2^1$.

— **Triangulație:** o reprezentare plană a unui graf planar, pentru care fiecare față este un triunghi (ciclu cu trei vîrfuri).

— **Triangulație a unui ciclu elementar** cu n vîrfuri: graful care constă din acel ciclu și din $n-3$ diagonale care nu se taie în interiorul ciclului.

— Teorema și numărul lui **Turán,** notat $M(n, k)$: a se vedea problema 9.9.

— Formula lui **Vandermonde**: a se vedea problema 3.2 a).

— Teorema lui **Vizing**: Indicele cromatic al oricărui graf G este egal cu D sau cu $D+1$, unde D este gradul maxim al vîrfurilor lui G (problema 10.19).

— **Vîrf izolat:** un vîrf de grad zero al unui graf.

— **Vîrf terminal:** un vîrf de gradul unu al unui graf.

— Numărul lui **van der Waerden** este notat $W(k, t)$ și reprezintă cel mai mic număr natural n cu proprietatea că dacă mulțimea $\{1, ..., n\}$ este partiționată într-un mod oarecare în k clase, există o clasă a partiției care conține o progresie aritmetică cu $t+1$ termeni.

— $[x]_n = x(x-1) \ldots (x-n+1)$; $[x]^n = x(x+1) \ldots (x+n-1)$ pentru orice x număr real și n număr natural.

ENUNȚURI

1. IDENTITĂȚI COMBINATORII

1.1. Arătați că pentru orice număr natural n au loc identitățile:

a) $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left\{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right\}^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n$.

1.2. Să se demonstreze egalitățile:

a) $\sum_{p=k-3}^{n-3} \binom{p}{k-3}\binom{n-p-1}{2} = \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n-p}{p} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } n \equiv 0 \pmod 3 \\ 0 \text{ pentru } n \equiv 1 \pmod 3 \\ -1 \text{ pentru } n \equiv 2 \pmod 3; \end{cases}$

c) $\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$.

1.3. Se notează $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, unde k este un întreg nenegativ. Să se arate că:

$$1 + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} S_k(n) = (n+1)^r.$$

1.4. Să se arate că pentru orice m și n numere naturale există un număr natural p astfel încît să avem:

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}.$$

1.5. Să se demonstreze următoarele identități cu combinări:

1) $\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{q}{m-k} = \binom{p+q}{m}$;

2) $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$;

3) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$;

4) $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$;

5) $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$;

6) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$;

7) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}$;

8) $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\binom{n+2p-k}{2p}=\binom{n+p}{p}^2$;

(Formula lui Li-Jen-Shu).

1.6. Să se demonstreze identitatea:

$$\sum_k(-1)^k\binom{2l}{l+k}\binom{2m}{m+k}\binom{2n}{n+k}=\frac{(l+m+n)!\,(2l)!\,(2m)!\,(2n)!}{(l+m)!\,(m+n)!\,(n+l)!\,l!\,m!\,n!}.$$

pentru orice numere l, m, n întregi și nenegative, unde suma se face după toate valorile întregi, pozitive și negative, ale lui k.

1.7. Să se arate că:

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{q}{i}a^{p-i}b^i=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{q+i}{i}(a-b)^{p-i}b^i.$$

1.8. Să se demonstreze formula lui Dixon:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3=(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

1.9. Fie dezvoltarea:

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots+a_{2n}x^{2n}.$$

Arătați că:

a) $a_n=1+\frac{n(n-1)}{(1!)^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2!)^2}+\ldots=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\binom{n}{2k}$;

b) $a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}=0$;

c) $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2=\frac{1}{2}[a_n+(-1)^{n-1}a_n^2]$;

d) $a_p-\binom{n}{1}a_{p-1}+\binom{n}{2}a_{p-2}-\ldots+(-1)^p\binom{n}{p}a_0=0$

dacă p nu este multiplu de 3 și este egală cu $(-1)^k\binom{n}{k}$ dacă $p=3k$;

e) $a_0+a_2+a_4+\ldots=\frac{1}{2}(3^n+1)$ și

$$a_1+a_3+a_5+\ldots=\frac{1}{2}(3^n-1);$$

f) $a_0+a_3+a_6+a_9+\ldots=a_1+a_4+a_7+a_{10}+\ldots=$
$=a_2+a_5+a_8+a_{11}+\ldots=3^{n-1}$;

g) Dintre sumele:

$a_0 + a_4 + a_8 + \ldots$; $a_1 + a_5 + a_9 + \ldots$;

$a_2 + a_6 + a_{10} + \ldots$, $a_3 + a_7 + a_{11} + \ldots$

trei sînt egale, iar a patra diferă de acestea printr-o unitate.

h) Există inegalitățile:

$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ și

$a_n > a_{n+1} > \ldots > a_{2n} = 1$ pentru orice $n \geqslant 2$.

1.10. Se consideră dezvoltarea:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^m)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{mn}\, x^{mn}$$

și se notează

$$S_i = a_i + a_{i+(m+2)} + a_{i+2(m+2)} + \ldots$$

pentru orice $0 \leqslant i \leqslant m + 1$.

Să se arate că:

$S_i = \dfrac{(m+1)^n + (-1)^{n-1}}{m+2} + (-1)^n$ pentru $n + i \equiv 0 \pmod{(m+2)}$ și în caz contrar, $S_i = \dfrac{(m+1)^n + (-1)^{n-1}}{m+2}$.

1.11. Care este coeficientul lui x^k din dezvoltarea:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^2$$

1.12. Fiind date numerele întregi și pozitive n și r arătați că există și sînt unice r numere întregi:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_r \geqslant 0,$$

astfel încît:

$$n = \binom{a_1}{r} + \binom{a_2}{r-1} + \ldots + \binom{a_r}{1}$$

1.13. Să se arate că:

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1} (x^k + y^k) \left(\frac{xy}{x+y}\right)^{n-k}.$$

1.14. Să se demonstreze identitatea:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n^{n-1-k} (k+1)! = n^n.$$

1.15. Să se arate că numărul de aranjări ale unei mulțimi de n obiecte într-o multime de p cutii, astfel încît prima cutie să conțină n_1 obiecte, a II-a cutie n_2 obiecte, ..., ultima cutie n_p obiecte, este egal cu numărul multinomial

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_p!},$$

unde $n_i \geqslant 0$ și $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.

1.16. Să se demonstreze formula multinomului:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_p \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p},$$

unde $a_1, \ldots, a_p$ sînt elemente dintr-un inel comutativ.

1.17. Să se justifice identitatea:

$$\sum_{k\geqslant 1}\ \sum_{(s_1,\ \ldots,\ s_k)} \binom{h}{s_1,\ \ldots,\ s_k} = \binom{m-1}{h-1},$$

unde a II-a sumă se face după toate alegerile numerelor $s_1, \ldots, s_k \geqslant 0$ care verifică relațiile:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_k = h;$$

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + ks_k = m.$$

1.18. O funcție $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, r\}$ se numește crescătoare dacă pentru orice $1 \leqslant i < j \leqslant n$ avem $f(i) \leqslant f(j)$.

Să se arate că numărul funcțiilor crescătoare definite pe mulțimea $\{1, \ldots, n\}$ cu valori în mulțimea $\{1, \ldots, r\}$ este egal cu

$$\frac{[r]^n}{n!} = \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!}.$$

Acest număr se mai numește combinări cu repetiție de r luate cîte n.

1.19. În cîte moduri se poate scrie un număr natural m ca o sumă de n întregi nenegativi

$$m = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

două sume fiind diferite dacă ele diferă și prin ordinea termenilor? Dar dacă impunem condiția ca cei n termeni ai sumei să fie strict pozitivi?

1.20. Să se determine numărul monoamelor din dezvoltarea polinomului

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n.$$

1.21. Fie $P(x)$ un polinom de gradul n, astfel încît $P(x) = 2^x$ pentru orice $x = 1, 2, \ldots, n+1$.

Să se determine $P(n+2)$.

1.22. Să se verifice identitatea:

$$\sum_{\substack{c_1+c_2+\ldots+c_k=n \\ c_i\geqslant 0}} c_1 c_2 \ldots c_k = \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}.$$

1.23. Să se demonstreze identitatea:

$$(1 + x + x^2 + \ldots)^n = \sum_{r\geqslant 0} \binom{n+r-1}{r} x^r.$$

1.24. Să se arate că:

$$\sum (-1)^{j_1+j_2+\ldots+j_n+1} \frac{(j_1+j_2+\ldots+j_n-1)!}{j_1!j_2!\ldots j_n!} = \frac{1}{n}$$

pentru orice întreg pozitiv n, unde suma se face după toate partițiile lui n de forma $j_1 + 2j_2 + \ldots + nj_n = n$ și $j_i \geqslant 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

1.25. Să se arate că pentru $h \geqslant 2$ există relațiile:

a) $$\max_{(n_1,\ \ldots,\ n_k)} \sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{h} = \binom{n-k+1}{h};$$

b) $\min\limits_{(n_1, \ldots, n_k)} \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{n_i}{h} = (k - r)\binom{t}{h} + r\binom{t+1}{h}$

unde maximul, respectiv minimul se iau după toate scrierile lui n de forma: $n = n_1 + \ldots + n_k$ și $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$, $t = \left[\frac{n}{k}\right]$ și r este restul împărțirii lui n la k.

1.26. Să se evalueze:

a) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \max\limits_{n_1 + \ldots + n_k = n} n_1 n_2 \ldots n_k$;

b) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \max\limits_{n_1 + \ldots + n_k = n} \binom{n_1}{2}\binom{n_2}{2} \ldots \binom{n_k}{2}$.

1.27. Dacă $n_1 \geqslant 3h$, $n_2 \geqslant 3h$, $h \geqslant 1$, unde n_1, n_2, h sînt numere întregi, să se demonstreze că oricare ar fi numerele întregi x, y astfel încît $0 \leqslant x \leqslant h$, $0 \leqslant y \leqslant h$, există inegalitatea:

$$\binom{n_1 - x}{n_1 - h}\binom{n_2 - y}{n_2 - h} \geqslant \binom{2h}{x + y}.$$

1.28. Pentru orice $p \leqslant k$ să se justifice identitatea:

$$\sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = p} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n! (k - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n))!}\binom{n}{1}^{\alpha_1} \ldots \binom{n}{n}^{\alpha_n} = \binom{nk}{p}.$$

1.29. Să se demonstreze identitățile lui Abel:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x + k)^{k-1} (y + n - k)^{n-k} = (x + y + n)^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x + k)^{k-1} (y + n - k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y + n)^{n-1}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n - k)^{n-k-1} = 2(n - 1)n^{n-2}$.

1.30. Să se arate că:

$$n^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n - k)^{n-k} = n^n.$$

1.31. Fiind dată o relație de recurență de forma:

$$f(n + 2) = af(n + 1) + bf(n)$$

unde a, b sînt numere reale cu $b \neq 0$ și $n = 0, 1, 2, \ldots$, ecuația de gradul doi:

$$r^2 = ar + b$$

se numește *ecuația caracteristică* a relației de recurență date.

Să se arate că:

a) Dacă ecuația caracteristică are două rădăcini distincte r_1 și r_2, soluția generală a relației de recurență are forma:

$$f(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

unde constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale, rezolvînd sistemul:

$$C_1 + C_2 = f(0)$$
$$C_1 r_1 + C_2 r_2 = f(1).$$

b) Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină dublă egală cu r_1, soluția generală a recurenței are forma:

$$f(n) = r_1^n(C_1 + C_2 n),$$

unde $C_1 = f(0)$ și $C_2 = \frac{f(1) - r_1 f(0)}{r_1}$.

1.32. Un elev are n lei. În fiecare zi el cumpără exact unul din următoarele produse: un covrig care costă 1 leu; o înghețată care costă 2 lei sau o prăjitură care costă 2 lei, pînă la epuizarea întregii sume.

În cîte moduri poate el să cheltuiască astfel cei n lei?

1.33. Fie $U(n)$ numărul de moduri în care poate fi acoperit un dreptunghi $ABCD$ cu dimensiunile 3 și n prin dominouri (dreptunghiuri cu dimensiunile 1 și 2). Se deduce simplu că $U(n) = 0$ dacă n este impar. Să se arate că pentru n par există relația:

$$U(2m) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^m + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^m\right).$$

1.34. Cîte cuvinte de lungime n pot fi formate cu litere din alfabetul $A = \{a, b, c, d\}$ astfel încît literele a și b să nu fie litere vecine?

1.35. Se notează

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} z^k.$$

Să se arate că:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

pentru $z \neq -\frac{1}{4}$ și $a_n = \frac{n+1}{2^n}$ pentru $z = -\frac{1}{4}$.

1.36. Se consideră polinomul

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

și se notează:

$S_n(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 + \ldots + x_n) - \sum f(x_1 + \ldots + x_{n-1}) + \sum f(x_1 + \ldots + x_{n-2}) - \ldots + (-1)^n f(0)$, unde prima sumă se face după cele $\binom{n}{n-1}$ sume formate cu $n-1$ variabilele x_j, a doua sumă se face după cele $\binom{n}{n-2}$ sume formate cu $n-2$ variabilele x_j etc.

Să se arate că $S_n(x_1, \ldots, x_n) = a_0 n! x_1 x_2 \ldots x_n$.

1.37. Fie $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polinom de n variabile de gradul m și să notăm cu $z^k p$ polinomul obținut din p prin înlocuirea a k dintre variabilele $x_1, \ldots, x_n$ cu 0 în toate modurile posibile și apoi însumînd cele $\binom{n}{k}$ polinoame astfel obținute. Să se arate că:

$$p - z^1 p + z^2 p - \ldots = \begin{cases} 0 \text{ pentru } m < n; \\ c \cdot x_1 \ldots x_n \text{ pentru } m = n, \end{cases}$$

unde c este coeficientul monomului $x_1 \ldots x_n$ în scrierea polinomului p.

Luînd $p(x_1,...,x_n) = (x_1 + ... + x_n)^k$ și făcînd $x_1 = ... = x_n = 1$, să se deducă identitatea lui Euler:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = \begin{cases} 0 \text{ pentru } 0 \leqslant k < n; \\ (-1)^n n! \text{ pentru } k = n. \end{cases}$$

1.38. Să se arate că pentru orice n și p numere întregi și pozitive, $n \geqslant p$, are loc identitatea:

$$p! = n^p - \binom{p}{1}(n-1)^p + \binom{p}{2}(n-2)^p - ... + (-1)^p \binom{p}{p}(n-p)^p.$$

2. PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI AL EXCLUDERII ȘI FORMULE DE INVERSIUNE

2.1. Într-o clasă dintr-un liceu învață 40 elevi. Dintre aceștia, 14 au preocupări pentru matematică, 16 pentru fizică și 11 pentru chimie. De asemenea 7 elevi au preocupări pentru matematică și fizică, 8 pentru fizică și chimie și 5 elevi pentru matematică și chimie, iar 4 elevi au preferințe pentru toate cele trei obiecte.

Cîți elevi nu au preferințe pentru matematică, fizică sau chimie?

2.2. Să se justifice principiul includerii și al excluderii:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{q} A_i \right| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{q+1} \left| \bigcap_{i=1}^{q} A_i \right|.$$

2.3. Pentru un întreg pozitiv n se notează prin $\varphi(n)$ funcția lui Euler, care este egală cu numărul întregilor pozitivi mai mici sau egali cu n și primi cu n.

Dacă $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_q^{i_q}$ este descompunerea lui n în q factori primi distincți doi cîte doi, să se arate că:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_q}\right).$$

2.4. Dacă p este o permutare a mulțimii $X = \{1,..., n\}$, spunem că numărul i este un punct fix al permutării p, dacă $p(i) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Să se arate că numărul $D(n)$ al permutărilor fără puncte fixe ale mulțimii X este egal cu:

$$D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Care este numărul permutărilor a n obiecte cu p puncte fixe?

2.5. Fie $X = \{1, 2, ..., n\}$ și $D(n)$ numărul permutărilor mulțimii X fără puncte fixe.

Dacă $E(n)$ reprezintă numărul permutărilor pare ale mulțimii X fără puncte fixe, arătați că:

$$E(n) = \frac{1}{2}(D(n) + (-1)^{n-1}(n-1)).$$

2.6. Arătați că $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$, unde φ este funcția lui Euler.

2.7. Să se demonstreze că numărul matricelor pătrate de ordinul 3 cu elemente nenegative, cu suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană egală cu r, este egal cu

$$\binom{r+2}{2}^2 - 3\binom{r+3}{4}.$$

2.8. Verificați că: $\sum_{n=0}^{\infty} D(n)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}$;

$$D(n+1) = (n+1)D(n) + (-1)^{n+1};$$
$$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1)).$$

2.9. Să se arate că numărul $s_{n,m}$ al funcțiilor surjective $f : X \to Y$, unde $|X| = n$ și $|Y| = m$, este dat de expresia:

$$s_{n,m} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \ldots + (-1)^{m-1} m.$$

Să se deducă de aici că dacă se notează prin $E(n, m)$ membrul drept al acestei expresii, obținem $E(n, n) = n!$ și $E(n, m) = 0$ pentru $n < m$ (identitățile lui Euler).

2.10. Se notează prin $s_{n,m,r}$ numărul funcțiilor $f : X \to Y$ care au proprietatea că $f(X) \supset Z$, unde $|X| = n$, $|Y| = m$ și $Z \subset Y$, $|Z| = r$. Să se deducă:

$$s_{n,m,r} = m^n - \binom{r}{1}(m-1)^n + \binom{r}{2}(m-2)^n - \ldots + (-1)^r (m-r)^n.$$

2.11. Fie A un alfabet format din n perechi de litere identice: a_1, a_1; a_2, a_2; ...; a_n, a_n, perechile diferite constînd din litere diferite.

Se formează toate cuvintele care folosesc toate cele $2n$ litere din alfabetul A, astfel încît să nu apară două litere identice vecine.

Să se arate că numărul acestor cuvinte este egal cu:

$$\frac{1}{2^n}\left[(2n)! - \binom{n}{1}2(2n-1)! + \binom{n}{2}2^2(2n-2)! - \ldots + (-1)^n 2^n n!\right].$$

2.12. Se notează cu a_n numărul grafurilor orientate, cu n vîrfuri etichetate cu numerele din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$, care nu conțin circuite.

Să se arate că numerele a_n verifică relația de recurență:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k} 2^{k(n-k)}\, a_{n-k},$$

dacă se definește $a_0 = 1$.

2.13. Se spune că mulțimea X este o colecție de obiecte de tipul $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$, dacă există o partiție a mulțimii X care conține λ_1 clase cu un element, λ_2 clase cu două elemente, ..., λ_n clase cu n elemente pentru care se identifică obiectele care aparțin unei aceleiași clase a partiției. O aranjare a obiectelor în celule este o aplicație $f : X \to A$, unde A este mulțimea celulelor. Dacă $f(x) = a_i$, vom spune că obiectul $x \in A$ este aranjat în celula a_i. Prin definiție, două aranjări sînt echivalente dacă ele se obțin una din cealaltă printr-o permutare a obiectelor din aceleași clase ale partiției lui X. Clasele acestei echivalențe se numesc scheme de aranjare a obiectelor în celule.

Dacă se notează prin $A_\emptyset(1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n};\ 1^m)$ numărul de scheme de aranjare a unei colecții de obiecte de tipul $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$ în m celule distincte

două cîte două și prin $A\,(1^{\lambda_1}\,2^{\lambda_2}\,\ldots\,n^{\lambda_n};\ 1^m)$ numărul de scheme de aranjare care nu lasă nici o celulă vidă, să se arate că:

$$A_\emptyset\,(1^{\lambda_1}\,2^{\lambda_2}\,\ldots\,n^{\lambda_n};\ 1^m) = \binom{m}{1}^{\lambda_1}\binom{m+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{m+n-1}{n}^{\lambda_n};$$

$$A(1^{\lambda_1}\,2^{\lambda_2}\,\ldots\,n^{\lambda_n};\ 1^m) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\binom{k}{1}^{\lambda_1}\binom{k+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{k+n-1}{n}^{\lambda_n}$$

2.14. Să se găsească numărul de posibilități de scriere a unui număr natural q ca un produs de m factori diferiți de unitate, pentru care două produse diferă prin natura sau prin ordinea factorilor, dacă descompunerea numărului p în factori primi conține λ_1 factori cu exponentul 1, λ_2 factori cu exponentul 2, ..., λ_n factori cu exponentul n.

2.15. Se notează:

$$M(p,\ q) = (2^q - 1)^p - \binom{q}{1}(2^{q-1} - 1)^p + \binom{q}{2}(2^{q-2} - 1)^p \ldots + (-1)^{q-1}\,q.$$

Arătați că $M(p,\ q) = M(q,\ p)$.

2.16. Fie $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o mulțime finită, înzestrată cu o relație binară de ordine parțială, notată $\leqslant$ care are prin definiție următoarele trei proprietăți:

a) $x_i \leqslant x_i$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ (reflexivitatea);

b) $x_i \leqslant x_j$ și $x_j \leqslant x_i$ implică $x_i = x_j$ (deci $i = j$) pentru $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ (antisimetria);

c) $x_i \leqslant x_j$ și $x_j \leqslant x_k$ implică $x_i \leqslant x_k$ pentru $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$ (tranzitivitatea).

O matrice pătrată de ordinul n cu elemente numere reale $(a_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\ldots,n}$ va fi numită compatibilă cu relația de ordine definită pe V sau pe scurt compatibilă, dacă $a_{ij} \neq 0$ implică $x_i \leqslant x_j$, pentru orice $i, j = 1; \ldots, n$. Să se arate că suma și produsul a două matrice compatibile este o matrice compatibilă și de asemenea dacă o matrice compatibilă este inversabilă, atunci inversa ei este compatibilă.

2.17. Dacă V este mulțimea parțial ordonată din problema precedentă, să se arate că există o funcție μ definită pe $V \times V$ cu proprietățile:

$$\mu(x,\ y) = 0 \text{ dacă } x \text{ nu este mai mic sau egal cu } y;$$

$$\mu(x,\ x = 1) \text{ pentru orice } x \in V;$$

$$\sum_{x \leqslant y \leqslant z} \mu(x,\ y) = 0 \text{ pentru orice } x < z \text{ și } x,\ z \in V.$$

Funcția μ se numește *funcția lui Moebius* a mulțimii V.

2.18. Să se evalueze funcția $\mu(x,\ y)$ introdusă în problema precedentă, dacă V este:

a) familia tuturor submulțimilor unei mulțimi finite S, cu relația de ordine parțială incluziunea nestrictă a mulțimilor, notată $X \subset Y$;

b) mulțimea întregilor 1, 2, ..., n unde $x \leqslant y$ se definește prin $x \mid y$ (x divide pe y);

c) o arborescență, unde relația de ordine parțială între vîrfuri se definește prin: $x \leqslant y$ dacă unicul drum care unește rădăcina arborescenței cu vîrful y trece prin x.

2.19. Fie $f(x)$ o funcție cu valori reale definită pe mulțimea V și $\mu(x,\ y)$ funcția lui Moebius a mulțimii V. Să notăm:

$$g(x) = \sum_{z \leqslant x} f(z).$$

Să se arate că:

$$f(x) = \sum_{z \leqslant x} \mu(z, x)\, g(z).$$

(Formula de inversiune a lui Moebius).

2.20. Dacă p și q sînt două partiții ale unei mulțimi X cu n elemente, vom defini relația de ordine parțială $p \leqslant q$ dacă partiția q este o rafinare a partiției p, adică orice clasă a lui q este inclusă într-o anumită clasă a partiției p. Notînd cu 0 partiția cu o singură clasă formată din X și cu 1 partiția cu n clase formate fiecare din cîte un singur element al lui X avem $0 \leqslant p \leqslant 1$ pentru orice partiție p a lui X.

Să se arate că:

$$\mu(0, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

2.21. Dacă mulțimea parțial ordonată V conține un prim element 0 și un ultim element 1 astfel încît $0 \leqslant x \leqslant 1$ pentru orice $x \in V$, să notăm cu p_k numărul lanțurilor de forma:

$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_k = 1.$$

Să se arate că:

$$\mu(0, 1) = -p_1 + p_2 - p_3 + \ldots .$$

3. NUMERELE LUI STIRLING, BELL, FIBONACCI, CATALAN

3.1. Pentru orice x număr real și n număr natural se notează:

$$[x]_n = x(x-1) \ldots (x-n+1) \text{ și}$$
$$[x]^n = x(x+1) \ldots (x+n-1),$$

luînd prin definiție $[x]_0 = [x]^0 = 1$.

Numărul lui Stirling de prima speță $s(n, k)$ se definește ca fiind coeficientul lui x^k din dezvoltarea lui $[x]_n$, adică:

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k) x^k.$$

Să se arate că:

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} |s(n, k)|\, x^k.$$

3.2. Arătați că au loc egalitățile:

a) $[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k}$ și

b) $[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]^k [y]^{n-k}$, unde $[x]_0 = [x]^0 = 1$.

3.3. Demonstrați identitățile:

a) $x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, [x]_k$ și

b) $[x]^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}[x]_k$,

unde $S(n, k)$ sînt numerele lui Stirling de speța a II-a.

3.4. Să se arate că numerele lui Stirling de speța a II-a se exprimă în funcție de numărul funcțiilor surjective prin relația:

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} s_{n,m}$$

și verifică relația de recurență:

$$S(n + 1, m) = S(n, m - 1) + mS(n, m),$$

iar $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

3.5. Să se justifice următoarele relații de recurență pentru numerele lui Stirling de speța a II-a $S(n, m)$ și pentru numerele lui Bell, notate B_n:

a) $S(n + 1, m) = \sum_{k=m-1}^{n} \binom{n}{k} S(k, m - 1)$;

b) $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$, unde $B_0 = 1$.

3.6. Arătați că numărul partițiilor unei mulțimi cu n elemente de tipul $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$, care conțin k_1 clase cu un element, k_2 clase cu două elemente, ..., k_n clase cu n elemente, este egal cu

$$\text{Part}\ (1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}; n) = \frac{n!}{(1!)^{k_1} k_1! (2!)^{k_2} k_2! \ldots (n!)^{k_n} k_n!},$$

iar numărul permutărilor $p \in S_n$ de tipul $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$, care conțin k_1 cicluri cu un element, k_2 cicluri cu două elemente, ..., k_n cicluri cu n elemente, este egal cu

$$\text{Perm}\ (1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}; n) = \frac{n!}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \ldots n^{k_n} k_n!},$$

dacă $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$ și $k_i \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

3.7. Să se demonstreze următoarele relații de recurență pentru numerele lui Stirling de prima și a II-a speță:

$$\binom{i+j}{i} s(n, i + j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s(k, i) s(n - k, j);$$

$$\binom{i+j}{i} S(n, i + j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k, i) S(n - k, j).$$

3.8. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k) S(k, m) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) s(k, m) = \delta_{n,m}$$

(simbolul lui Kronecker).

3.9. Să notăm $M(n) = \max \{k \mid S(n, k)$ este maxim; $1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Să se demonstreze că șirul numerelor lui Stirling de speța a II-a este unimodal pentru orice n număr natural, adică el are una din formele:

a) $1 = S(n, 1) < S(n, 2) < \ldots < S(n, M(n)) > S(n, M(n) + 1) > \ldots > S(n, n) = 1$;

b) $1 = S(n, 1) < S(n, 2) < \ldots < S(n, M(n) - 1) = S(n, M(n)) > \ldots > S(n, n) = 1$.

În plus, $M(n + 1) = M(n)$ sau $M(n + 1) = M(n) + 1$.

3.10. Fie $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ un șir infinit de numere reale. Numerele lui Stirling generalizate se definesc după cum urmează:

i) Numerele lui Stirling de prima speță $s_a(n, k)$ prin identitatea:

$$(x \mid a)_n = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} s_a(n, k)\, x^k \text{ și } (x \mid a)_0 = 1;$$

ii) Numerele lui Stirling de a doua speță $S_a(n, k)$ prin identitatea:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_a(n, k)(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} S_a(n, k)(x \mid a)_k.$$

Arătați că:

1) $s_a(n, k) = s_a(n - 1, k - 1) - a_{n-1}\, s_a(n - 1, k)$;

2) $S_a(n, k) = S_a(n - 1, k - 1) + a_k S_a(n - 1, k)$;

3) $s_a(n, k) = \sum_{r=k}^{n} s_a(n + 1, r + 1) a_n^{r-k}$;

4) $S_a(n, k) = \sum_{r=k}^{n} S_a(r - 1, k - 1)\, a_k^{n-r}$;

5) $s_a(n, k) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{n-r} s_a(r - 1, k - 1) \prod_{j=r}^{n-1} a_j$;

6) $\sum_{k=0}^{n} s_a(n, k)\, S_a(k, m) = \sum_{k=0}^{n} S_a(n, k)\, s_a(k, m) = \delta_{n,m}$ (simbolul lui Kronecker).

3.11. Pentru numerele lui Stirling de speța a II-a generalizate, asociate șirului $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, demonstrați că funcția generatoare are expresia:

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_a(n, k)\, t^n = \frac{t^k}{(1 - a_0 t)(1 - a_1 t) \ldots (1 - a_k t)}.$$

3.12. Se notează cu $S_i(n, k)$ numărul partițiilor unei mulțimi X cu n elemente în k clase, fiecare din ele conținînd cel puțin i elemente.

Dovediți că:

1) $S_i(n, k) = kS_i(n - 1, k) + \binom{n-1}{i-1} S_i(n - i, k - 1)$;

2) $S_i(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{(j_1, \ldots, j_k)} \frac{n!}{j_1! \ldots j_k!}$,

unde suma se face după toate soluțiile întregi $j_1, \ldots, j_k$ ale ecuației $j_1 + \ldots + j_k = n$, care verifică $j_s \geqslant i$ pentru $s = 1, \ldots, k$.

3.13. Să se arate că numerele lui Stirling de speța a II-a verifică relațiile:

1) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$;

2) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$;

3) $S(n, 1) - 1!S(n, 2) + 2!S(n, 3) - 3!S(n, 4) + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)! = 0$ pentru $n \geqslant 2$.

3.14. O biacoperire cu k clase a unei mulțimi X cu n elemente este o familie de k submulțimi nevide ale lui X, astfel încît orice element $x \in X$ este conținut în exact două submulțimi ale familiei.

Dacă se notează prin $c(n, k)$ numărul biacoperirilor cu k clase ale lui X, să se arate că:

$$c(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1).$$

3.15. O partiție parțială a unei mulțimi X este o partiție a unei submulțimi

$$Y \subset X, \; Y \neq \emptyset.$$

Arătați că numărul partițiilor parțiale ale unei mulțimi X cu n elemente este egal cu $B_{n+1} - 1$.

3.16. Să se arate că funcția generatoare exponențială a numerelor lui Bell este dată de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \exp(\exp(t) - 1).$$

3.17. Să se arate că numerele lui Bell B_n verifică:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!};$$

iar diferența dintre numărul partițiilor cu un număr par de clase și numărul partițiilor cu un număr impar de clase ale unei mulțimi cu n elemente este egal cu:

$$e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^n}{k!}.$$

3.18. Dacă se notează prin $f(n, k)$ numărul submulțimilor mulțimii $X = \{1, \ldots, n\}$ care conțin k elemente, dintre care oricare două nu sînt întregi consecutivi, să se arate că:

$$f(n, k) = \binom{n - k + 1}{k}.$$

Dacă se notează $F_{n+1} = \sum_{k \geqslant 0} f(n, k)$, atunci $F_0 = F_1 = 1$ și să se demonstreze că $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pentru orice $n \geqslant 2$. Numerele F_n se numesc *numerele lui Fibonacci*.

3.19. Dacă se notează prin $f^*(n, k)$ numărul submulțimilor mulțimii $X = \{1, \ldots, n\}$ care au k elemente și nu conțin nici doi întregi consecutivi, nici numerele 1 și n simultan, să se arate că:

$$f^*(n, k) = \frac{n}{n - k} \binom{n - k}{k}.$$

Dacă se notează $L_n = \sum_{k\geqslant 0} f^*(n, k)$ pentru $n \geqslant 1$, atunci $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ și $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ pentru orice $n \geqslant 2$. Numerele L_n se numesc *numerele lui Lucas*.

3.20. Să se arate că numerele lui Fibonacci verifică identitatea:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

3.21. Care este numărul u_n de moduri în care putem urca o scară cu n trepte, știind că la fiecare pas urcăm o treaptă sau două trepte?

Să se arate că funcția generatoare

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2},$$

dacă se definește $u_0 = 1$.

3.22. Să se arate că orice număr natural $n \geqslant 1$ poate fi scris ca o sumă de numere Fibonacci distincte două cîte două, care nu conține doi termeni consecutivi F_p și F_{p+1} din șirul numerelor lui Fibonacci.

3.23. Să se arate că funcția generatoare a numerelor lui Catalan T_n este dată de egalitatea:

$$f(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \ldots + T_n x^n + \ldots = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Să se găsească pe această cale expresia numerelor T_n.

3.24. Să se arate că numărul șirurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2})$ cu $x_i \in \{-1, 1\}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$ și care satisfac condițiile:

a) $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant 0$ pentru orice $1 \leqslant k \leqslant 2n-2$;

b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-2} = 0$

este egal cu $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

3.25. O triangulație a unui poligon convex $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ cu $n+1$ vîrfuri este o mulțime formată din $n-2$ diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului ci numai în vîrfuri și care împart suprafața poligonului în $n-1$ triunghiuri.

Să se arate că numărul de triangulații ale unui poligon convex cu $n+1$ vîrfuri este egal cu

$$T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

3.26. Să se arate că numărul funcțiilor crescătoare

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

care satisfac condiția $f(x) \leqslant x$ pentru orice $1 \leqslant x \leqslant n$ este egal cu numărul lui Catalan

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

3.27. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon convex. În cîte moduri poate fi triangulat acest poligon prin $n-3$ diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului, în așa fel încît fiecare triunghi care se obține în acest mod să aibă una sau două laturi comune cu poligonul convex?

3.28. Să se arate că numărul șirurilor $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ formate din întregi nenegativi, care au proprietățile:

$$a_1 = 0 \text{ și } |a_i - a_{i+1}| = 1 \text{ pentru } 1 \leqslant i \leqslant k, \text{ este egal cu } \binom{k}{[k/2]}.$$

3.29. Se notează cu $g_0(n+1)$ numărul șirurilor $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ formate din întregi nenegativi, astfel încît $a_1 = 0$ și

$$|a_i - a_{i+1}| \leqslant 1 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se demonstreze că:

$$g_0(n+1) = c(n, n) + c(n, n+1), \text{ unde}$$

$$(1 + x + x^2)^m = \sum_{k \geqslant 0} c(m, k) x^k.$$

3.30. Să se arate că numărul șirurilor $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ formate din întregi nenegativi, cu proprietatea că $a_1 = a_{2n+1} = 0$ și $|a_i - a_{i+1}| = 1$ pentru $i = 1, \ldots, 2n$, este egal cu numărul lui Catalan

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

3.31. Să se arate că numărul șirurilor

$$(x_1, \ldots, x_r) \text{ cu } 1 \leqslant x_i \leqslant n$$

care conțin cel mult $i - 1$ termeni mai mici sau egali cu i pentru $i = 1, \ldots, n$ este egal cu $(n - r)n^{r-1}$ pentru orice $1 \leqslant r \leqslant n$.

3.32. Fie S_n numărul funcțiilor $f: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ cu proprietatea că dacă f ia o valoare i atunci f ia de asemenea orice valoare j cu $1 \leqslant j \leqslant i$. Se notează $S_0 = 1$.

Să se demonstreze că:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$$

și să se arate că funcția generatoare exponențială a numerelor S_n este egală cu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{1}{2 - e^x}.$$

3.33. Numărul subspațiilor de dimensiune k ale unui spațiu vectorial n — dimensional V peste un corp finit F cu q elemente, unde q este o putere a unui număr prim, se notează prin $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ și se numește coeficientul lui Gauss. Să se arate că

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \ldots (q - 1)}.$$

3.34. Justificați următoarele proprietăți ale coeficienților lui Gauss:

a) $\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$;

b) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$;

c) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$.

3.35. Dacă q este puterea unui număr prim, arătați că are loc identitatea lui Cauchy:

$$y^n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (y-1)(y-q)\ldots(y-q^{n-k-1}).$$

4. PROBLEME DE COMBINATORICA MULȚIMILOR

4.1. Fie X o colecție de n obiecte ($n \geqslant 1$), nu neapărat distincte. Dacă $n \geqslant a^2 + 1$, cu a număr întreg nenegativ, arătați că are loc cel puțin unul din următoarele două cazuri:

i) cel puțin $a + 1$ obiecte sînt identice;

ii) cel puțin $a + 1$ obiecte sînt distincte două cîte două.

4.2. În cîte moduri se pot aranja k turnuri pe o tablă de șah cu m linii și n coloane, astfel încît ele să nu se poată ataca reciproc?

4.3. Fie A o mulțime formată cu 19 numere întregi, distincte două cîte două, care aparțin progresiei aritmetice 1, 4, 7,..., 100.

Să se arate că există doi întregi distincți în A a căror sumă este egală cu 104.

4.4. Se dă un număr natural $k \geqslant 1$. Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea următoare: Oricum am alege n numere întregi, există cel puțin două dintre acestea care au suma sau diferența divizibile prin $2k + 1$.

4.5. Fie $A = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $B = (B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $C = (C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ trei partiții ale unei mulțimi finite M.

Dacă pentru orice i, j, k există inegalitatea:

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geqslant n,$$

să se arate că $|M| \geqslant \frac{n^3}{3}$, egalitatea putînd avea loc cînd $n \equiv 0 \pmod 3$.

4.6. O funcție $f : X \to X$ se numește idempotentă dacă $f(f(x)) = f(x)$ pentru orice $x \in X$.

Dacă mulțimea X are n elemente, să se arate că numărul $i(n)$ al funcțiilor idempotente $f : X \to X$ este dat de relația:

$$i(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

4.7. Fie P o mulțime parțial ordonată. O submulțime S a lui P se numește lanț dacă oricare două elemente ale lui S sînt comparabile în raport cu relația de ordine. Dacă oricare două elemente ale lui S sînt incomparabile în raport cu relația de ordine, atunci S se numește antilanț.

Pentru m număr natural, arătați că dacă P nu are nici un lanț de cardinal $m + 1$, atunci această mulțime parțial ordonată se poate exprima ca o reuniune de m antilanțuri.

4.8. Un lanț de lungime n în familia partițiilor unei mulțimi X cu n elemente este un șir de partiții distincte două cîte două care verifică:

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_n.$$

Partiția P_1 are o singură clasă formată din X, iar P_n are n clase care conțin fiecare cîte un singur element al lui X.

Să se arate că numărul lanțurilor de lungime n în familia partițiilor lui X cu n elemente este egal cu

$$\frac{(n-1)!n!}{2^{n-1}}.$$

4.9. Fie $F = \{E_1, \ldots, E_s\}$ o familie de submulțimi cu r elemente ale unei mulțimi X. Dacă intersecția a oricare $r+1$ mulțimi din F este nevidă, să se arate că intersecția tuturor mulțimilor din F este nevidă.

4.10. Fie $S = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ o familie de submulțimi distincte două cîte două ale lui X cu proprietatea că $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ pentru orice $i, j = 1, \ldots, r$.

Dacă mulțimea X are n elemente, să se arate că $\max r = 2^{n-1}$.

4.11. Fie X o mulțime nevidă și $m \geqslant 2$ submulțimi ale lui X care formează o familie F.

Să se arate că printre mulțimile de forma $A \Delta B$ (diferența simetrică a mulțimilor A și B), unde $A, B \in F$ există cel puțin m mulțimi diferite două cîte două.

4.12. O acoperire a unei mulțimi S este o familie formată din submulțimi nevide, distincte două cîte două ale lui S, a căror reuniune este S.

Arătați că numărul $A(n)$ al acoperirilor unei mulțimi cu n elemente este dat de:

$$A(n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} 2^{2^{n-j}-1}.$$

4.13. O acoperire A a unei mulțimi S care este formată din k submulțimi nevide se numește ireductibilă dacă reuniunea oricăror $k-1$ submulțimi din A este o submulțime proprie a lui S.

Dacă se notează prin $I(n, k)$ numărul acoperirilor ireductibile formate din k submulțimi ale unei mulțimi S cu n elemente, să se arate că

$$I(n, k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (2^k - k - 1)^{n-i} S(i, k),$$

unde $S(i, k)$ este numărul lui Stirling de a II-a speță.

În particular să se deducă:

$$I(n, n-1) = \frac{1}{2} n(2^n - n - 1) \text{ și}$$

$$I(n, 2) = S(n+1, 3).$$

4.14. Pentru oricare n mulțimi distincte două cîte două $A_1, \ldots, A_n$ se consideră o subfamilie de cardinal maxim $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ cu proprietatea că nu conține reuniunile de mulțimi, adică

$$A_i \cup A_j \neq A_k$$

pentru oricare trei indici diferiți doi cîte doi, $i, j, k \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Se notează $f(n) = \min r$, unde minimul se consideră după toate familiile formate din n mulțimi diferite două cîte două. Să se arate că:

$$\sqrt{2n} - 1 \leqslant f(n) \leqslant 2\sqrt{n} + 1.$$

4.15. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi finite astfel încît

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_n| \text{ și se notează } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S.$$

Pentru un k fixat ($1 \leqslant k \leqslant n$), oricare reuniune a k mulțimi din această familie este egală cu S și oricare reuniune a cel mult $k-1$ mulțimi din familie este o submulțime proprie a lui S.

Să se arate că $|S| \geqslant \binom{n}{k-1}$, iar în cazul cînd această inegalitate devine egalitate se obține $|A_i| = \binom{n-1}{k-1}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

4.16. Fie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ o familie de submulțimi cu k elemente ale unei mulțimi X.

Arătați că $\min \left| \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right|$ este egal cu cel mai mic întreg m care are proprietatea $k \leqslant \binom{m}{h}$

4.17. Să se arate că:

$\sum_{A_1, \ldots, A_k} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = n(2^k - 1)2^{k(n-1)}$, unde suma se face după toate alegerile submulțimilor $A_1, \ldots, A_k$ ale unei mulțimi X cu n elemente.

4.18. Să se demonstreze că:

$$\sum |A_1 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap \ldots \cap A_k|,$$

sumele efectuîndu-se după toate alegerile posibile ale submulțimilor $A_1, \ldots, A_k$ ale unei mulțimi X.

4.19. Un sistem S de submulțimi nevide ale unei mulțimi X cu n elemente se numește bază de filtru dacă pentru orice $A, B \in S$ există $C \in S$ astfel încît $C \subset A \cap B$.

Să se arate că numărul bazelor de filtru ale mulțimii X este egal cu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{2^k - 1}.$$

4.20. Fie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ și $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ două familii de mulțimi cu proprietatea că $|A_1| = \ldots = |A_m| = p$, $|B_1| = \ldots = |B_m| = q$ și $A_i \cap B_j = \emptyset$ dacă și numai dacă $i = j$.

Să se arate că

$$m \leqslant \binom{p+q}{p}.$$

4.21 Dacă X este o mulțime cu n elemente și $G = \{A_1, \ldots, A_p\}$ o familie de submulțimi ale lui X incomparabile două cîte două în raport cu incluziunea, adică $A_i \not\subset A_j$ pentru orice $i, j = 1, \ldots, p$ și $i \neq j$, să se arate că

$$\max p = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

(Teorema lui Sperner).

4.22. Fie X o mulțime cu n elemente și $F = \{A_1,...,A_p\}$ o familie de submulțimi ale lui X care verifică condițiile:

1) $|A_i| = r \leqslant \frac{n}{2}$ pentru orice $i = 1,...,p$;

2) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pentru orice $i, j = 1,...,p$.

Să se demonstreze că $\max p = \binom{n-1}{r-1}$.

(Teorema lui Erdös-Ko-Rado).

4.23. Fie X o mulțime finită și $E_1,..., E_m$ o familie de submulțimi ale lui X cu proprietatea că oricare două mulțimi distincte E_i și E_j nu au exact un element în comun și $|E_i| \geqslant 2$ pentru $i = 1,...,m$.

Să se arate că putem colora elementele din X cu 2 culori, astfel încît nici o mulțime E_i să nu aibă toate elementele de o aceeași culoare pentru $1 \leqslant i \leqslant m$.

4.24. Dacă $F = \{E_1,...,E_n\}$ este o familie de submulțimi cu r elemente ale unei mulțimi X și $n \leqslant 2^{r-1}$, să se arate că putem colora elementele lui X cu 2 culori astfel încît nici o submulțime din familia F să nu aibă elementele colorate cu o aceeași culoare.

4.25. Fie M o mulțime cu $n \geqslant 5$ elemente și F o familie de submulțimi cu trei elemente ale lui M care sînt distincte două cîte două.

Dacă F conține cel puțin $n + 1$ submulțimi, să se arate că există cel puțin două dintre acestea care au exact un element în comun.

4.26. Să considerăm două colecții (mulțimi multiple) de numere întregi $\{a_1,..., a_n\} \neq \{b_1,..., b_n\}$ astfel încît fiecare întreg poate apare de mai multe ori în fiecare colecție, iar colecțiile

$$\{a_i + a_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \text{ și } \{b_i + b_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

sînt egale.

Să se arate că n este o putere a lui 2.

4.27. Dacă X este o mulțime cu n elemente ($n \geqslant 1$), fie $F = \{A_1,..., A_m\}$ o familie de submulțimi ale lui X care au proprietatea:

$$|A_i \cap A_j| = 1 \text{ pentru orice } 1 \leqslant i, j \leqslant m \text{ și } i \neq j.$$

Să se arate că $m \leqslant n$.

4.28. Dîndu-se n puncte distincte în plan, să se arate că există mai puțin de $n\sqrt{n}$ perechi de puncte dintre acestea, care se găsesc la o distanță egală cu 1.

4.29. Se dau n puncte în spațiu, astfel încît oricare patru nu sînt coplanare. Se consideră mulțimea celor $\binom{n}{3}$ plane determinate de cîte trei puncte, care au proprietatea că oricare două plane nu sînt paralele.

Să se determine numărul dreptelor de intersecție ale acestor plane.

4.30. Cîte triunghiuri pot fi formate cu vîrfurile în cele n vîrfuri ale unui poligon convex și ale căror laturi nu sînt laturi ale poligonului?

4.31. Se consideră un poligon convex cu n vîrfuri.

Cele $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale ale poligonului au proprietatea că oricare două nu sînt paralele şi oricare trei nu sînt concurente în puncte diferite de vîrfurile poligonului.

Să se arate că numărul punctelor lor de intersecţie, situate în exteriorul poligonului, este egal cu:

$$\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

4.32. Fie n puncte pe un cerc cu proprietatea că dintre cele $\frac{n(n-1)}{2}$ corzi cu extremităţile în cele n puncte, nu există trei corzi care să fie concurente într-un punct situat în interiorul cercului.

Să se arate că aceste corzi delimitează

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

regiuni în interiorul cercului pentru orice $n \geqslant 1$.

4.33. În plan se desenează o mulţime de curbe simple închise care nu se autointersectează, dar oricare două se taie în cel puţin două puncte.

Se notează cu n_p numărul de puncte în care se intersectează exact p curbe.

Să se arate că numărul regiunilor închise ale planului, mărginite de arce ale acestor curbe şi care nu conţin în interior astfel de arce este egal cu:

$$1 + n_2 + 2n_3 + \ldots + (p-1)n_p + \ldots$$

4.34. Dacă S este o mulţime, se notează prin $M(S) = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ o familie ordonată de submulţimi ale sale. m-uplul $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ constituie un sistem de reprezentanţi distincţi (pe scurt SRD) pentru $M(S)$, dacă $a_i \in S_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant m$ şi $a_i \neq a_j$ pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant m$ şi $i \neq j$.

Să se arate că $M(S)$ admite un SRD dacă şi numai dacă $|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k$ pentru orice $1 \leqslant k \leqslant m$ şi pentru toate alegerile numerelor distincte două cîte două $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$.

4.35. Dacă X este o mulţime cu n elemente, se notează prin $M(n, k, h)$ numărul minim de submulţimi cu h elemente dintr-o familie F de submulţimi cu h elemente ale lui X, care are proprietatea că orice submulţime cu k elemente a lui X conţine cel puţin o mulţime din familia F. $(n \geqslant k \geqslant h \geqslant 1)$.

Să se arate că:

1) $M(n, k, h) \geqslant \frac{n}{n-h} M(n-1, k, h)$;

2) $M(n, k, h) \leqslant M(n-1, k-1, h-1) + M(n-1, k, h)$;

3) $\binom{n}{h} \Big/ \binom{k}{h} \leqslant M(n, k, h) \leqslant \binom{n-k+h}{h}$.

4.36. Să se arate că:

1) $M(n, k, 2) = \binom{n}{2} - \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2-r^2}{2} - \binom{r}{2}$,

pentru orice $n \geqslant k \geqslant 2$, unde r este restul împărţirii lui n prin $k-1$.

2) $M(n, n-h, k) = h+1$ pentru orice $n \geqslant k(h+1)$ şi $k \geqslant 1$.

4.37. Un *bloc design incomplet şi echilibrat (BDIE)* este o mulţime B formată din v obiecte (numite şi varietăţi), împreună cu o familie F formată din b submulţimi ale lui B, numite blocuri, astfel încît:

a) fiecare bloc conține exact k obiecte;
b) fiecare obiect aparține la exact r blocuri;
c) fiecare pereche de obiecte distincte este inclusă în exact λ blocuri.
Să se arate că parametrii (b, v, r, k, λ) ai unui *BDIE* satisfac următoarele relații:

$$bk = vr \text{ și } r(k - 1) = \lambda(v - 1).$$

4.38. Fie X o mulțime cu v elemente și $X_1, X_2, \ldots, X_v$ o familie formată din v submulțimi ale lui X. Această familie se numește o (v, k, λ) — configurație, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:
a) $|X_i| = k$ pentru $i = 1, 2, \ldots, v$;
b) $|X_i \cap X_j| = \lambda$ pentru orice $i \neq j$;
c) $0 < \lambda < k < v - 1$.
Matricea de incidență $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant v}$ a acestei configurații este o matrice pătrată, care se definește astfel: $a_{ij} = 1$ dacă elementul i al lui X aparține mulțimii X_j și $a_{ij} = 0$ în caz contrar. Să se arate că:

$$A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J,$$

dacă și numai dacă A este matricea de incidență a unei (v, k, λ) — configurații, unde A^T este transpusa matricei A, matricea J este matricea pătrată de ordinul v formată numai din 1, iar I este matricea unitate de ordinul v.

4.39. Să se arate că orice (v, k, λ) — configurație este un *BDIE* cu parametrii (v, v, k, k, λ).

4.40. Fie X o mulțime avînd v elemente, $v \geqslant 3$. Un sistem Steiner de ordinul v este o familie de submulțimi cu 3 elemente ale lui X, numite și triplete, astfel încît fiecare submulțime cu 2 elemente a lui X este conținută într-un singur triplet.
Să se demonstreze că o condiție necesară pentru existența unui sistem Steiner de ordinul v este ca $v \equiv 1$ sau $v \equiv 3 \pmod 6$.

4.41. Un bloc design incomplet și echilibrat se numește simetric dacă $v = b$ și deci $k = r$.
Să se arate că dacă un *BDIE* simetric cu parametrii (v, v, k, k, λ) are proprietatea că v este număr par, atunci $k - \lambda$ este pătrat perfect.

4.42. Fie X o mulțime cu n elemente și Y o submulțime a lui X cu k elemente. Să se arate că numărul maxim de submulțimi ale lui X, două cîte două incomparabile în raport cu incluziunea, care conțin exact r elemente din Y, este egal cu

$$\binom{k}{r}\binom{n-k}{[(n-k)/2]}.$$

5. PARTIȚII ALE UNUI ÎNTREG

5.1. În cîte moduri putem alege trei numere din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, astfel încît suma lor să fie divizibilă prin 3?

5.2. Să se arate că numărul $P(n, m)$ al partițiilor întregului n în m părți satisface recurența:

$$P(n + k, k) = P(n, 1) + P(n, 2) + \ldots + P(n, k),$$

iar $P(n, 1) = P(n, n) = 1$.

5.3. Să se demonstreze că numărul partițiilor întregului n în părți distincte două cîte două este egal cu numărul partițiilor lui n în părți impare.

5.4. Numărul partițiilor întregului pozitiv n în m părți distincte două cîte două este egal cu $P\left(n - \binom{m}{2}, m\right)$.

5.5. Pentru un număr întreg și pozitiv n vom căuta acele partiții ale lui n care au proprietatea că orice număr întreg cuprins între 1 și n se reprezintă în mod unic ca o sumă parțială a acestei partiții.

Pentru ce numere întregi partiția

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1$$

este unica soluție a problemei?

5.6. Să se demonstreze identitatea lui Euler:

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots (1 - x^n) \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\, x^n =$$

$$= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \ldots,$$

unde $\psi(n) = (-1)^k$ dacă $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ și $\psi(n) = 0$ dacă n nu se poate reprezenta sub forma $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, unde k este un număr întreg.

5.7. Să se justifice expresiile următoarelor funcții generatoare:

a) Funcția generatoare a numerelor $P(n)$ ale tuturor partițiilor întregului n este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots};$$

unde $P(0) = 1$;

b) Funcția generatoare a numerelor $P(n, m)$ ale partițiilor întregului n în m părți este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, m)x^n = \frac{x^m}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^m)};$$

c) Funcția generatoare a numerelor partițiilor lui n în părți impare este

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\ldots};$$

d) Funcția generatoare a numerelor partițiilor lui n în părți distincte două cîte două este $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\ldots$;

e) Funcția generatoare a numerelor partițiilor lui n în părți impare, distincte două cîte două, este $(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)\ldots$

5.8. Să se demonstreze teorema pentagonală a lui Euler:

$$P(n) = P(n - 1) + P(n - 2) - P(n - 5) - P(n - 7) + \ldots$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \left(P\left(n - \frac{3k^2 - k}{2}\right) + P\left(n - \frac{3k^2 + k}{2}\right) \right),$$

pentru orice $n \geqslant 8$.

5.9. Să se arate că numărul partițiilor lui n pentru care nici un întreg nu apare de mai mult de două ori ca o parte este egal cu numărul partițiilor lui n în părți nedivizibile cu 3.

De exemplu, pentru $n = 6$ cele două mulțimi de partiții sînt respectiv $\{6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+3,\ 3+2+1,\ 2+2+1+1\}$ și $\{5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 2+2+2,\ 2+2+1+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1\}$.

5.10. Fie $P(n)$ și $Q(n)$ numărul partițiilor lui n, respectiv numărul partițiilor lui n în părți impare.

Arătați că au loc următoarele relații de recurență:

a) $Q(n) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i Q(i)\, Q(2n - i)$, unde $Q(0) = 1$;

b) $P(n) = \sum_{i \geqslant 0} P(i) Q(n - 2i)$, unde $P(0) = Q(0) = 1$.

5.11. Demonstrați că $P(n, m) = P(n - m)$ pentru $m \geqslant \frac{n}{2}$.

5.12. Numărul triunghiurilor care au lungimile laturilor numere întregi și pozitive diferite două cîte două, au perimetrul egal cu $2n$ și nu sînt congruente două cîte două este egal cu numărul $Q(n, 3)$ al partițiilor întregului n în trei părți distincte două cîte două.

Să se mai arate că $Q(n, 3) = \left[\frac{n^2 - 6n + 12}{12}\right]$.

5.13. Să se justifice identitatea:

$$(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5) \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1 - x^2)(1 - x^4) \ldots (1 - x^{2k})}$$

numărînd în două moduri diferite diagramele Ferrers simetrice. În mod asemănător să se demonstreze identitatea lui Euler:

$$(1 + xy)(1 + x^3y)(1 + x^5y) \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2} y^k}{(1 - x^2)(1 - x^4) \ldots (1 - x^{2k})}.$$

6. ARBORI

6.1. Fie $A = (X, U)$ un arbore și $A_1 = (X_1, U_1), \ldots, A_p = (X_p, U_p)$ o mulțime de subarbori ai lui A.

Dacă $B = \bigcap_{i=1}^{p} X_i \neq \emptyset$, să se arate că B este mulțimea vîrfurilor unui subarbore al lui A.

6.2. Fie $G_1, \ldots, G_k$ subarbori ai unui arbore G cu proprietatea că oricare doi au cel puțin un vîrf comun. Să se arate că $G_1, \ldots, G_k$ au cel puțin un vîrf comun.

6.3. Se dau întregii $d_1, \ldots, d_n$ care verifică:

$$0 < d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n.$$

Să se arate că există un arbore cu n vîrfuri cu gradele vîrfurilor egale respectiv cu $d_1, \ldots, d_n$, dacă și numai dacă

$$d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2.$$

6.4. Fie A_1, A_2 doi arbori parțiali ai unui graf conex G. Să se arate că există un șir de arbori:

$$A_1 = B_1,\ B_2, \ldots,\ B_r = A_2$$

astfel încît B_{i+1} se obține din B_i prin suprimarea unei muchii u și adăugarea unei alte muchii v între două vîrfuri neadiacente ale lui B_i, pentru $i = 1, \ldots, r-1$.

6.5. Pentru un graf conex G se notează cu $d(x, y)$ distanța dintre vîrfurile x și y, adică numărul de muchii conținute în cel mai scurt lanț care unește pe x cu y și cu $e(x) = \max_y d(x, y)$ excentricitatea vîrfului x.

Centrul grafului G este format din acele vîrfuri x_0 cu proprietatea $e(x_0) = \min_x e(x) = \rho(G)$, unde $\rho(G)$ este prin definiție raza grafului G.

Diametrul grafului conex G, notat $d(G)$, se definește astfel: $d(G) = \max_x e(x)$.

1) Să se demonstreze că centrul oricărui arbore este format dintr-un vîrf sau din două vîrfuri adiacente.

2) Dacă G este arbore, să se arate că $e(x)$ este o funcție convexă în sensul că dacă y, z sînt vîrfuri adiacente cu x, atunci

$$2e(x) \leqslant e(y) + e(z).$$

3) Pentru orice graf conex G există inegalitatea:

$$d(G) \leqslant 2\rho(G).$$

6.6. Orice arbore cu n vîrfuri, de diametru mai mare sau egal cu $2k - 3$, conține cel puțin $n - k$ lanțuri de lungime egală cu k.

6.7. Determinați arborii G cu n vîrfuri pentru care suma $\sum_{x, y} d(x, y)$ este minimă, respectiv maximă.

6.8. Dacă G este un arbore cu mulțimea vîrfurilor X, pentru orice vîrf $x \in X$ să notăm

$$s(x) = \sum_{y \in X} d(x, y).$$

1) Să se arate că funcția $s(x)$ este strict convexă în sensul că dacă y și z sînt două noduri adiacente cu x, atunci există inegalitatea:

$$2s(x) < s(y) + s(z).$$

2) Funcția $s(x)$ își atinge minimul într-un singur vîrf sau în două vîrfuri adiacente ale arborelui G.

6.9. Fie $x_1, \ldots, x_r$ nodurile terminale ale unui arbore A. Se notează $d_{ij} = d(x_i, x_j)$. Să se arate că:

1) Pentru oricare trei indici i, j, k există relațiile

$$d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} \geqslant 0 \text{ și}$$

$$d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} \equiv 0 \pmod 2.$$

2) Pentru oricare patru indici i, j, k, l, două dintre numerele $d_{ij} + d_{kl}$, $d_{ik} + d_{jl}$, $d_{il} + d_{jk}$ sînt egale, iar al treilea este mai mic sau egal cu cele două numere egale.

6.10. Fie A și B doi arbori pentru care vîrfurile terminale sînt etichetate cu numerele din mulțimea $\{1, 2, \ldots, r\}$. Dacă distanțele dintre vîrfurile terminale sînt aceleași pentru A și B, adică:

$$d_A(i, j) = d_B(i, j)$$

pentru orice $1 \leqslant i < j \leqslant r$, să se arate că arborii A și B sînt izomorfi.

6.11. Dacă $G = (X, U)$ este un arbore și $f : X \to X$ este o aplicație cu proprietatea că dacă $[x, y] \in U$ atunci $f(x) = f(y)$ sau $[f(x), f(y)] \in U$, să se arate că f are un punct fix sau o muchie fixă.

6.12. Fie A un arbore cu mulțimea vîrfurilor X, astfel încît $|X| = 2n + 1$. Un automorfism al arborelui A este o bijecție $f : X \to X$ care păstrează adiacența vîrfurilor, adică $[x, y]$ este o muchie a arborelui A dacă și numai dacă $[f(x), f(y)]$ este o muchie a lui A.

Să se arate că f are cel puțin un punct fix.

6.13. Fie $A_1 = (X, U_1)$ și $A_2 = (X, U_2)$ doi arbori care au aceeași mulțime de vîrfuri X.

Dacă pentru orice vîrf $x \in X$ subgraful obținut din A_1 prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x este izomorf cu subgraful obținut din A_2 prin aceeași operație, să se arate că arborii A_1 și A_2 au același diametru.

6.14. Dacă G este un arbore cu mulțimea vîrfurilor $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, să notăm

$$D = (d_{ij})_{i,\, j = 1, \ldots, n}$$

unde $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ este distanța dintre vîrfurile x_i și x_j în G.

Să se arate că

$$\det D = (-1)^{n-1}(n - 1)2^{n-2}.$$

6.15. Fie A un arbore cu vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$. Se suprimă vîrful terminal (de grad unu) care are cel mai mic indice, împreună cu muchia incidentă cu el și fie A_{n-1} arborele obținut și a_1 indicele vîrfului adiacent cu vîrful terminal suprimat. Se repetă acest procedeu pentru arborele A_{n-1} și se determină indicele a_2 al vîrfului adiacent cu vîrful terminal de indice minim al lui A_{n-1} ș.a.m.d., pînă cînd se ajunge la un arbore format din două vîrfuri adiacente.

Am obținut astfel un șir $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ de $n - 2$ numere, $1 \leqslant a_i \leqslant n$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n - 2$, asociat arborelui A și numit codul lui Prüfer al lui A.

Să se arate că:

1) Corespondența astfel definită este o bijecție între mulțimea arborilor A cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ și mulțimea celor n^{n-2} șiruri $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ care pot fi formate cu numere din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$;

2) Există n^{n-2} arbori cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ *(formula lui Cayley)*;

3) Numărul arborilor cu gradele vîrfurilor $x_1, \ldots, x_n$ egale respectiv cu $d_1, \ldots, d_n$, care verifică $d_i \geqslant 1$ și $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$, este egal cu:

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

6.16. Se notează cu a_n numărul arborilor cu vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$.

Să se arate că

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} a_k a_{n-k}$$

și să se demonstreze formula lui Cayley plecînd de la această identitate, folosind una din identitățile lui Abel.

6.17. Să se găsească numărul arborilor cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ care au exact p vîrfuri terminale.

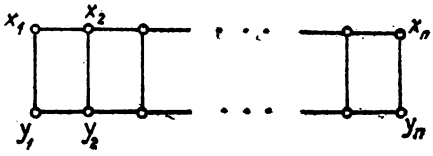


Fig. 6.1.

6.18. Se consideră graful-scară din figura 6.1, care are $2n$ vîrfuri.

a) În cîte moduri putem alege n muchii care nu au două cîte două extremități comune?

b) Să se arate că acest graf are

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right)$$

arbori parțiali.

6.19. Să se arate că o matrice pătrată de ordinul p, $D=(d_{ij})$, este matricea distanțelor dintre vîrfurile unui graf conex cu p vîrfuri, astfel încît d_{ij} este distanța dintre vîrfurile i și j, dacă și numai dacă D are următoarele proprietăți:

a) $d_{ij}\geqslant 0$ pentru orice $1\leqslant i, j\leqslant p$;

b) $d_{ij}=0$ dacă și numai dacă $i=j$;

c) D este simetrică;

d) $d_{ij}\leqslant d_{ik}+d_{kj}$ pentru orice i, j, k și

e) Dacă $d_{ij}>1$, există un indice $k\neq i, j$, astfel încît $d_{ij}=d_{ik}+d_{kj}$.

7. PARITATE

7.1. Pe mulțimea U a muchiilor grafului complet cu n vîrfuri K_n se definește într-un mod oarecare o funcție:

$$f: U\to\{-1, 1\}$$

O muchie u cu $f(u)=1$ se va numi pozitivă și dacă $f(u)=-1$ muchia u se va numi negativă. Un triunghi (ciclu elementar cu 3 vîrfuri) se numește pozitiv dacă el conține un număr par de muchii negative. În caz contrar el se numește negativ.

Dacă $|f^{-1}(-1)|=p$, adică există p muchii negative în U, să se arate că numărul $n(f)$ al triunghiurilor negative verifică relația:

$$n(f)\equiv np \pmod 2.$$

7.2. Fie G un graf planar cu toate fețele triunghiulare. Dacă vîrfurile lui G sînt colorate într-un mod oarecare cu 3 culori, numărul fețelor ale căror vîrfuri sînt colorate cu toate cele 3 culori este par.

7.3. Un circuit eulerian al unui graf orientat G este un circuit care folosește fiecare arc al lui G.

Să se arate că graful G care nu conține vîrfuri izolate are un circuit eulerian dacă și numai dacă el este conex și pentru orice vîrf x gradul de intrare și gradul de ieșire sînt egale, sau:

$$d^-(x)=d^+(x).$$

7.4. Dacă graful orientat G are cel puțin un vîrf x cu gradul de ieșire $d^+(x)\geqslant 3$, numărul circuitelor euleriene ale lui G este par (două circuite euleriene se consideră identice dacă ele induc o aceeași permutare circulară a arcelor lui G).

7.5. Dacă graful neorientat G are toate gradele vîrfurilor pare, muchiile lui G pot fi orientate în așa fel încît în graful orientat care se obține fiecare vîrf x să aibă:

$$d^-(x) = d^+(x).$$

7.6. Un graf neorientat G are un ciclu eulerian dacă și numai dacă este conex și are gradele tuturor vîrfurilor pare.

Dacă însă G este conex și are $2k$ vîrfuri de grad impar ($k \geqslant 1$), el este reuniunea a k lanțuri disjuncte relativ la muchii, care nu folosesc de două ori aceeași muchie.

7.7. Dacă $G = (X, U)$ este un graf orientat, graful complementar $\bar{G} = (X, \bar{U})$ se definește astfel: Arcul $(x, y) \in \bar{U}$ dacă și numai dacă $(x, y) \notin U$ pentru orice $x, y \in X$ și $x \neq y$.

Să notăm cu $h(G)$ numărul drumurilor hamiltoniene ale grafului G. Să se demonstreze că:

$$h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2,$$

această proprietate rămînînd adevărată și în cazul grafurilor neorientate cu $n \geqslant 4$ vîrfuri.

7.8. Orice graf-turneu conține un număr impar de drumuri hamiltoniene.

7.9. Graful G are toate vîrfurile de grad impar. Să se arate că fiecare muchie a lui G aparține unui număr par de cicluri hamiltoniene.

7.10. $G = (X, U)$ fiind un graf conex cu m muchii și n vîrfuri, numărul grafurilor parțiale $G' = (X, V)$ ale lui G, unde $V \subset U$, care au gradele tuturor vîrfurilor pare, este egal cu 2^{m-n+1}.

7.11. Mulțimea X a vîrfurilor oricărui graf poate fi partiționată în două clase X_1 și X_2 dintre care una poate fi vidă, astfel încît subgrafurile cu mulțimile de vîrfuri X_1, respectiv X_2 să aibă toate gradele vîrfurilor pare. Să se arate că proprietatea rămîne adevărată dacă gradele vîrfurilor din subgraful generat de X_1 sînt pare și gradele vîrfurilor din subgraful generat de X_2 sînt impare.

8. CONEXITATE

8.1. Fie $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ gradele vîrfurilor unui graf G și să presupunem că $d_k \geqslant k$ pentru orice $k \leqslant n - d_n - 1$. Să se arate că G este conex.

8.2. Fie G un graf conex cu n vîrfuri și $1 \leqslant k \leqslant n$.

Să se arate că G conține un subgraf conex H cu k vîrfuri.

8.3. Pentru orice graf G cu n vîrfuri, m muchii și p componente conexe are loc inegalitatea:

$$p + m \geqslant n.$$

8.4. Dacă G este un graf conex, atunci oricare două lanțuri elementare de lungime maximă au cel puțin un vîrf comun. Dacă în plus G este arbore, să se arate că toate lanțurile de lungime maximă ale lui G au cel puțin un vîrf comun.

8.5. Un graf se numește bipartit dacă există o partiție a mulțimii vîrfurilor

$$X = A \cup B$$

astfel încît orice muchie a grafului să aibă o extremitate în A și alta în B. Să se arate că un graf G este bipartit dacă și numai dacă orice ciclu elementar al lui G are un număr par de vîrfuri.

8.6. Există un graf cu 10 vîrfuri pentru care șirul gradelor vîrfurilor sale este respectiv:

$$1,1,1,3,3,3,4,6,7,9?$$

8.7. Fie întregii $d_1,\ldots, d_n$ astfel încît

$$0 \leqslant d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n.$$

Să se arate că aceste numere sînt grade ale vîrfurilor unui multigraf cu n vîrfuri, dacă și numai dacă sînt verificate următoarele două condiții:

a) $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par și

b) $d_n \leqslant d_1 + \ldots + d_{n-1}$.

8.8. Ce numere pot reprezenta numărul de vîrfuri ale grafurilor regulate de grad k?

8.9. Se consideră un graf G cu n vîrfuri care nu conține subgrafuri complete cu trei vîrfuri și astfel încît oricare două vîrfuri neadiacente x și y să aibă următoarea proprietate:

Există exact alte două vîrfuri care sînt adiacente și cu x și cu y. Să se arate că există un număr întreg $p \geqslant 0$ astfel încît $n = 1 + \binom{p+1}{2}$ și graful G este regulat de grad p.

8.10. Fiind date numerele naturale $r \geqslant 2$ și $g \geqslant 2$, să se arate că există un multigraf G regulat de gradul r, cu grosimea $g(G) = g$.

8.11. G fiind un graf regulat de gradul r cu n vîrfuri și $g(G) = g$, să se arate că:

$$n \geqslant 1 + r + r(r-1) + \ldots + r(r-1)^{(g-3)/2} \text{ pentru } g \text{ impar}$$

și

$$n \geqslant 2(1 + (r-1) + \ldots + (r-1)^{g/2-1}) \text{ pentru } g \text{ par.}$$

8.12. Să se determine grafurile G regulate de gradul 3, cu numărul minim de vîrfuri, astfel încît cea mai mică lungime a unui ciclu elementar să fie $g(G) = 4$, respectiv $g(G) = 5$.

8.13. Orice graf conex G conține cel puțin uu vîrf x care are proprietatea că subgraful G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x, este conex.

Rămîne proprietatea adevărată dacă în loc de conexitate considerăm proprietatea de a fi tare conex?

8.14. Un graf orientat G este tare conex dacă și numai dacă pentru orice submulțime A de vîrfuri, $A \neq \emptyset$, există cel puțin un arc al lui G de forma (x, y) unde $x \in A$ și $y \notin A$.

Să se arate că enunțul rămîne valabil dacă se înlocuiesc arcele (x, y) prin (y, x), unde $y \notin A$ și $x \in A$.

8.15. Să se arate că dacă un graf-turneu G are un circuit, atunci G conține un circuit cu 3 vîrfuri.

8.16. Pentru un graf-turneu cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ se notează cu r_i numărul arcelor care intră în vîrful x_i și cu s_i numărul arcelor care ies din vîrful x_i.

Să se arate că:

1) $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$.

2) $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$.

8.17. Orice graf-turneu G conține un vîrf x astfel încît oricare alt vîrf y poate fi atins plecînd din x pe un drum cu cel mult două arce.

8.18. Orice graf orientat G conține o mulțime S de vîrfuri care nu sînt adiacente două cîte două, cu proprietatea că orice vîrf $x \notin S$ poate fi atins plecînd dintr-un vîrf $y \in S$, pe un drum $(y, \ldots, x)$ de lungime cel mult egală cu 2.

8.19. Să se arate că numărul $C(n)$ al grafurilor neorientate conexe cu n vîrfuri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisface relația de recurență:

$$C(n) = 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}} C(k)$$

pentru $n \geqslant 3$ și $C(1) = C(2) = 1$.

8.20. Să se demonstreze că aproape toate grafurile neorientate cu n vîrfuri au diametrul egal cu 2 pentru $n \to \infty$, sau dacă notăm cu $d_2(n)$ numărul grafurilor neorientate cu n vîrfuri din mulțimea X, care au diametrul egal cu 2, avem:

$$\lim_{n \to \infty} d_2(n) / 2^{\binom{n}{2}} = 1.$$

8.21. Pentru un graf G, să se arate că relația binară $\sim$ definită pe mulțimea muchiilor U în felul următor: „scriem $u_i \sim u_j$ dacă $i = j$ sau muchiile u_i și u_j se găsesc pe un același ciclu elementar" pentru $u_i, u_j \in U$, este o relație de echivalență.

8.22. Un graf G este 2-conex dacă G este conex și nu conține puncte de articulație, adică vîrfuri x cu proprietatea că subgraful G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x să nu fie conex.

Să se arate că următoarele proprietăți sînt echivalente pentru un graf G cu $n \geqslant 3$ vîrfuri:

a) G este 2-conex;

b) Oricare două vîrfuri ale lui G aparțin unui ciclu elementar;

c) G nu are vîrfuri izolate și oricare două muchii ale lui G se găsesc pe un ciclu elementar.

8.23. Fie G un graf 2-conex. Dacă G conține două cicluri elementare de lungime maximă, să se arate că aceste cicluri au cel puțin două vîrfuri comune.

8.24. Dacă G este un graf și x, y sînt două vîrfuri ale lui G, să notăm cu $G - x - y$ subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfurilor x și y.

Fie G_1, G_2 două grafuri cu aceeași mulțime de vîrfuri X care conține $n \geqslant 4$ vîrfuri.

Dacă graful $G_1 - x - y$ este izomorf cu $G_2 - x - y$ pentru toate alegerile vîrfurilor x, $y \in X$, să se arate că grafurile G_1 și G_2 sînt identice.

8.25. Se consideră o tablă de șah cu n linii și n coloane (n impar). Poate un cal de pe tabla de șah, sărind în L, să treacă o dată și numai o dată prin toate cele n^2 pătrățele ale tablei, întorcîndu-se în punctul de plecare? (Euler).

9. PROBLEME EXTREMALE PENTRU GRAFURI ȘI REȚELE DE TRANSPORT

9.1. Pentru un graf G vom spune că muchia u acoperă vîrful x dacă x este una dintre extremitățile lui u, iar o mulțime de muchii formează un cuplaj dacă ele nu au două cîte două extremități comune.

Vom nota cu $\nu(G)$ numărul maxim de muchii dintr-un cuplaj și cu $\rho(G)$ numărul minim de muchii ale lui G care acoperă toate vîrfurile lui G.

Dacă G are n vîrfuri care nu sînt izolate, să se arate că:

$$\nu(G) + \rho(G) = n.$$

9.2. Să se arate că:

1) Dacă graful G este regulat de grad k și are n vîrfuri, numărul de triunghiuri în grafurile G și $\bar{G}$ este egal cu

$$\binom{n}{3} - \frac{nk}{2}(n - k - 1).$$

2) Orice graf G cu n vîrfuri și complementarul său $\bar{G}$ conțin împreună cel puțin

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$$

triunghiuri.

9.3. Orice graf G cu n vîrfuri și m muchii conține cel puțin $\frac{4m}{3n}\left(m - \frac{n^2}{4}\right)$ triunghiuri.

9.4. Să se arate că un graf-turneu cu n vîrfuri conține cel mult $\frac{1}{4}\binom{n+1}{3}$ circuite cu 3 vîrfuri, această margine putînd fi atinsă pentru n impar.

9.5. Orice graf-turneu cu n vîrfuri conține cel puțin un drum hamiltonian și cel mult $\frac{n!}{2^{n/2}}$ drumuri hamiltoniene.

9.6. Să se arate că orice graf cu n vîrfuri și $m > \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$ muchii conține cel puțin un ciclu elementar cu 4 vîrfuri.

9.7. Să se arate că dacă un graf cu n vîrfuri nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri ($k \geqslant 2$) atunci el conține cel puțin $m = \{n/(k-1)\}$ vîrfuri cu gradele mai mici sau egale cu $p = [(k-2)n/(k-1)]$.

9.8. Pentru o mulțime M formată din 1001 persoane, orice submulțime formată din 11 persoane conține cel puțin două persoane care se cunosc între ele.

Să se arate că există cel puțin 101 persoane astfel încît fiecare dintre ele cunoaște cel puțin 100 persoane din M.

9.9. Să se demonstreze că în clasa grafurilor G cu n vîrfuri, fără subgrafuri complete cu k vîrfuri, numărul maxim de muchii ale unui graf este egal cu

$$M(n, k) = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2},$$

unde r este restul împărțirii lui n la $k-1$, adică $n = (k-1)t + r$ și $0 \leqslant r \leqslant k-2$.

Graful G pentru care se atinge acest număr maxim de muchii este unic pînă la un izomorfism și el constă din $k-1$ clase de vîrfuri, dintre care r clase conțin cîte $t+1$ vîrfuri, iar clasele rămase conțin cîte t vîrfuri, astfel încît fiecare vîrf se leagă prin muchii cu toate vîrfurile care nu aparțin aceleiași clase cu el (Teorema lui Turán).

9.10. Se consideră $3n$ puncte distincte în plan care formează mulțimea M, astfel încît maximul distanțelor dintre ele să fie egal cu 1.

Să se arate că cel mult $3n^2$ distanțe dintre aceste puncte sînt mai mari ca

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9.11. Fiind date $2n$ puncte în plan astfel încît oricare trei nu sînt coliniare, să se arate că numărul maxim de segmente de dreaptă care se pot construi cu extremitățile în aceste puncte astfel încît să nu se formeze nici un triunghi este egal cu n^2.

9.12. Să se găsească numărul maxim de subgrafuri complete maximale (în raport cu incluziunea) pe care le poate conține un graf cu n vîrfuri.

9.13. Fiind date n orașe, dorim să construim o rețea telefonică conexă cu vîrfurile în aceste n orașe. Se cunosc costurile $c(u)$ de construcție ale liniei pentru orice muchie $u = [x_i, x_j]$ cu $x_i \neq x_j$ a grafului complet G astfel definit și dorim să minimizăm costul total de construcție a rețelei. Deci trebuie să găsim un arbore parțial A al lui G astfel încît suma costurilor asociate muchiilor lui A să fie minimă.

Să se arate că următorul algoritm produce un arbore parțial minim al lui G:

a) Se alege muchia lui G cu costul minim;

b) Dintre muchiile nealese, se selectează o muchie care nu formează cicluri cu muchiile deja alese și care are costul minim.

Se repetă aplicarea pasului b) al algoritmului pînă cînd alegem o mulțime de muchii de cardinal $n-1$.

9.14. Dacă toate cele $\binom{n}{2}$ muchii ale grafului cu vîrfurile reprezentînd cele n orașe din problema precedentă au costuri diferite două cîte două, atunci arborele parțial de cost minim este unic.

9.15. Se notează cu E mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, unde $x_i \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$ și $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Dacă $G = (X, U)$ este un graf neorientat cu n vîrfuri, are loc egalitatea:

$$\max_{x \in E} \sum_{[i,j] \in U} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

unde k este numărul maxim al vîrfurilor unui subgraf complet al grafului G.

9.16. Fiind dat un graf tare conex G, să asociem fiecărui arc u un număr nenegativ $c(u) \geqslant 0$. Dacă a, b sînt două vîrfuri distincte ale lui G, o (a, b)-tăietură este o mulțime C de arce cu proprietatea că orice drum de la a la b conține cel puțin un arc din C.

Să se arate că:

$$\max_{D} \min_{u \in D} c(u) = \min_{C} \max_{u \in C} c(u),$$

unde D parcurge mulțimea tuturor drumurilor $D = (a, \ldots, b)$ iar C parcurge mulțimea tuturor (a, b)-tăieturilor din G.

9.17. Pentru un graf orientat $G = (X, U)$ fie a, b două vîrfuri diferite ale lui G și c o funcție $c: U \to R$ astfel încît $c(u) \geqslant 0$ pentru orice arc $u \in U$. Să presupunem că g este o funcție $g: X \to R$ care verifică următoarele două condiții:

$$g(a) = 0;$$

$g(y) - g(x) \leqslant c(x, y)$ pentru orice arc $(x, y) \in U$.

Vom defini valoarea funcției c pentru un drum D al grafului G ca fiind suma valorilor lui c pentru toate arcele lui G, adică:

$$c(D) = \sum_{u \in A(D)} c(u),$$

unde $A(D)$ reprezintă mulțimea arcelor drumului D.

Să se arate că

$$\min_{D} c(D) = \max_{g} g(b),$$

unde $D = (a, \ldots, b)$ parcurge mulțimea drumurilor de la a la b, presupunînd că există cel puțin un drum de la a la b.

9.18. Un graf orientat $G = (X, U)$ se numește *rețea de transport* dacă el satisface următoarele condiții:

a) Există un vîrf unic $a \in X$ în care nu intră nici un arc sau $\omega^-(a) = \emptyset$, unde prin $\omega^-(a)$ se notează mulțimea arcelor care intră în vîrful a;

b) Există un vîrf unic $b \in X$ din care nu iese nici un arc sau $\omega^+(b) = \emptyset$, unde prin $\omega^+(b)$ se notează mulțimea arcelor care ies din vîrful b;

c) G este conex și există drumuri de la a la b în G;

d) S-a definit o funcție $c: U \to R$ astfel încît $c(u) \geqslant 0$ pentru orice arc $u \in U$.

Vîrful a se numește *intrarea rețelei*, vîrful b se numește *ieșirea rețelei*, iar $c(u)$ este *capacitatea* arcului u.

O funcție $f: U \to R$ astfel încît $f(u) \geqslant 0$ pentru orice arc u se numește *flux* în rețeaua de transport G cu funcția de capacitate c, care se notează $G = (X, U, c)$, dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

(**C**) Condiția de conservare a fluxului:

Pentru orice vîrf $x \neq a$, b suma fluxurilor pe arcele care intră în x este egală cu suma fluxurilor pe arcele care ies din x, adică:

$$\sum_{u \in \omega^-(x)} f(u) = \sum_{u \in \omega^+(x)} f(u) \text{ pentru orice } x \in X \setminus \{a, b\}.$$

(**M**) Condiția de mărginire a fluxului:

Există inegalitatea $f(u) \leqslant c(u)$ pentru orice arc $u \in U$.

Pentru orice mulțime de vîrfuri $A \subset X$ vom defini o *tăietură* $\omega^-(A) = \{(x, y) \mid x \notin A, y \in A, (x, y) \in U\}$, adică mulțimea arcelor care intră în mulțimea A de vîrfuri. Vom mai nota:

$$\omega^+(A) = \{(x, y) \mid x \in A, y \notin A, (x, y) \in U\},$$

adică mulțimea arcelor care ies din mulțimea A de vîrfuri. Capacitatea tăieturii $\omega^-(A)$ se notează $c(\omega^-(A)) = \sum_{u \in \omega^-(A)} c(u)$. Să se arate că:

1) $\sum_{u \in \omega^+(a)} f(u) = \sum_{u \in \omega^-(b)} f(u)$.

În continuare se va nota valoarea comună a acestor două sume cu f_b.

2) Pentru orice mulțime de vîrfuri $A \subset X$ astfel încît $a \notin A$ și $b \in A$ fluxul f_b la ieșirea rețelei verifică:

$$f_b = \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u) \leqslant c(\omega^-(A)).$$

9.19. Să se demonstreze teorema lui Ford-Fulkerson:

Pentru orice rețea de transport $G = (X, U, c)$ cu intrarea a și ieșirea b valoarea maximă a fluxului la ieșire este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi, adică:

$$\max_f f_b = \min_{A \mid a \notin A, b \in A} c(\omega^-(A)).$$

9.20. Să considerăm următorul algoritm pentru obținerea unui flux maxim la ieșirea b a unei rețele de transport $G = (X, U, c)$, unde funcția capacitate $c(u) \geqslant 0$ ia numai valori întregi:

1) Se definește fluxul inițial avînd componente nule pe fiecare arc al rețelei, adică $f(u) = 0$ pentru orice arc $u \in U$;

2) Se determină lanțurile nesaturate de la a la b pe care fluxul poate fi mărit, prin următorul procedeu de etichetare:

a) Se marchează intrarea a cu $[+]$;

b) Un vîrf x fiind marcat, se va marca:

— cu $[+ x]$ oricare vîrf y nemarcat cu proprietatea că arcul $u = (x, y)$ este nesaturat, adică $f(u) < c(u)$;

— cu $[-x]$ orice vîrf y nemarcat cu proprietatea că arcul $u = (y, x)$ are un flux nenul, adică $f(u) > 0$.

Dacă prin acest procedeu de marcare se etichetează ieșirea b, atunci fluxul f_b obținut la pasul curent nu este maxim. Se va considera atunci un lanț format din vîrfuri etichetate (ale căror etichete au respectiv semnele $+$ sau $-$) care unește pe a cu b și care poate fi găsit ușor urmărind etichetele vîrfurilor sale în sensul de la b către a.

Dacă acest lanț este v, să notăm cu v^+ mulțimea arcelor (x, y), unde marcajul lui y are semnul $+$, deci care sînt orientate în sensul de la a către b și cu v^- mulțimea arcelor (x, y), unde marcajul lui y are semnul $-$, deci care sînt orientate în sensul de la b către a.

Determinăm cantitatea:

$$\varepsilon = \min \left(\min_{u \in v^+} (c(u) - f(u)), \min_{u \in v^-} f(u) \right).$$

Din modul de etichetare rezultă $\varepsilon > 0$.

Vom mări cu ε fluxul pe fiecare arc $u \in v^+$ și vom micșora cu ε fluxul pe fiecare arc $u \in v^-$, obținînd la ieșire un flux egal cu $f_b + \varepsilon$. Se repetă aplicarea pasului 2 cu fluxul nou obținut.

Dacă prin acest procedeu de etichetare nu putem marca ieșirea b, să se demonstreze că fluxul obținut are o valoare f_b la ieșire maximă, iar mulțimea arcelor care unesc vîrfurile marcate cu vîrfurile care nu au putut fi marcate constituie o tăietură de capacitate minimă. Să se arate că vom ajunge în această situație după un număr finit de pași.

9.21. Algoritmul din problema precedentă nu are neapărat un număr finit de pași și nu conduce întotdeauna la fluxul maxim la ieșire dacă funcția capacitate a arcelor $c: U \to R$ ia valori iraționale. Pentru aceasta considerați șirul:

$$a_n = r^n,$$

unde $r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ este un număr irațional subunitar și care satisface recurența:

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$$

pentru orice $n \geqslant 0$. Fie de asemenea rețeaua de transport cu 10 vîrfuri din figura 9.1, care conține arcele $A_1 = (x_1, y_1)$ de capacitate a_0, $A_2 = (x_2, y_2)$ de capacitate a_1, $A_3 = (x_3, y_3)$ de capacitate a_2 și $A_4 = (x_4, y_4)$ de capacitate a_2, precum și arcele (y_i, y_j), (x_i, y_j), (y_i, x_j) pentru $i, j = 1, \ldots, 4$ și $i \neq j$ și arcele (a, x_i) și (y_i, b) pentru $i = 1, \ldots, 4$. Pentru a nu complica prea mult figura două arce de sens contrar (x, y) și (y, x) au fost reprezentate printr-o singură muchie neorientată $[x, y]$.

Toate arcele din rețea diferite de A_1, A_2, A_3 și A_4 au o capacitate egală cu:

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 - r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2.$$

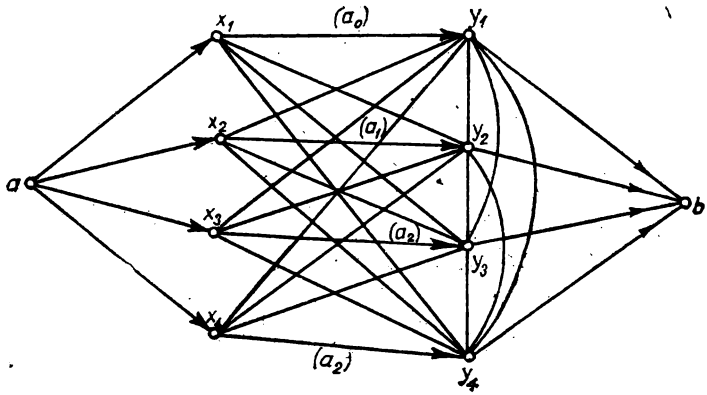


Fig. 9.1.

Aplicați algoritmul din problema precedentă în ordinea lanțurilor: $[a, x_1, y_1, b]$, $[a, x_2, y_2, x_3, y_3, b]$, $[a, x_2, y_2, y_1, x_1, y_3, x_3, y_4, b]$ ș.a.m.d. astfel încît să putem mereu crește fluxul f_b, care va fi egal cu $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, strict inferior fluxului maxim, $\max_f f_b = 4c$.

9.22. Pentru un graf G să notăm cu $\nu(G)$ numărul maxim de muchii dintr-un cuplaj, care prin definiție nu au două cîte două extremități comune și cu $\tau(G)$ numărul minim de vîrfuri ale unui suport S din G, care prin definiție are proprietatea că orice muchie are cel puțin o extremitate în S.

Dacă G este bipartit, să se demonstreze că:

$$\nu(G) = \tau(G),$$

aplicînd teorema lui Ford-Fulkerson într-o rețea de transport construită în mod convenabil, plecînd de la graful G.

9.23. Să se arate că dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ este o matrice cu n linii și m coloane cu elemente 0 și 1, numărul maxim de elemente egale cu 1 care se găsesc în linii și coloane diferite ale matricei este egal cu numărul minim de linii și coloane care conțin împreună toate elementele egale cu 1 ale matricei A (teorema lui König).

10. PROBLEME DE COLORARE

10.1. Dacă fiecare vîrf al unui graf G are gradul cel mult egal cu k, numărul cromatic al grafului G verifică inegalitatea:

$$\chi(G) \leqslant k + 1.$$

10.2. Dacă $\bar{G}$ este complementarul grafului G cu n vîrfuri, demonstrați următoarele inegalități pe care le verifică numărul cromatic:

$$2\sqrt{n} \leqslant \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqslant n + 1,$$

$$n \leqslant \chi(G)\,\chi(\bar{G}) \leqslant \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right].$$

10.3. Să presupunem că un graf planar G are un ciclu hamiltonian. Să se arate că fețele oricărei reprezentări în plan a grafului G pot fi colorate cu 4 culori, astfel încît oricare două fețe care au muchii comune să aibă culori diferite.

10.4. Să desenăm un număr oarecare de linii în plan, astfel încît oricare trei dintre ele să nu fie concurente. Putem obține un graf planar G considerînd punctele de intersecție ale liniilor ca vîrfuri ale unui graf și segmentele dintre punctele de intersecție vecine ca muchii ale acestui graf. Să se arate că

$$\chi(G) \leqslant 3.$$

10.5. Dacă G este un graf planar conex cu n vîrfuri și m muchii, el are $m - n + 2$ fețe (inclusiv fața infinită) în orice reprezentare planară a sa (Formula lui Euler).

10.6. Orice graf planar cu n vîrfuri are cel mult $3n - 6$ muchii și orice graf planar cu n vîrfuri care nu conține triunghiuri are cel mult $2n - 4$ muchii.

10.7. Să se arate că grafurile K_5 și $K_{3,3}$ nu sînt planare.

10.8. Orice graf planar G conține un vîrf x cu gradul $d(x) \leqslant 5$.
Construiți un graf planar cu proprietatea că $d(x) \geqslant 5$ pentru orice vîrf x.

10.9. Un graf planar G cu n vîrfuri și m muchii are cea mai mică lungime a ciclurilor sale elementare $g(G) = g \geqslant 3$. Să se arate că

$$m \leqslant \frac{g}{g-2}(n-2).$$

10.10. Să se arate că orice graf planar G are numărul cromatic $\chi(G) \leqslant 5$.

10.11. Să se construiască un graf G_1 cu numărul cromatic $\chi(G_1) = 3$ și un graf G_2 cu numărul cromatic $\chi(G_2) = 4$, care nu conțin triunghiuri.

10.12. Se consideră graful infinit G definit astfel: Mulțimea vîrfurilor lui G este $\{(a, b) \mid a, b \in Z \text{ și } a > 0, b > 0\}$, fiecare vîrf (a, b) fiind adiacent cu toate vîrfurile $(a + b, 1), (a + b, 2), \ldots, (a + b, n), \ldots$, deci cu toate punctele de coordonate întregi și pozitive ale dreptei $x = a + b$.
Să se arate că G nu conține triunghiuri și numărul său cromatic $\chi(G) = \infty$.

10.13. Dacă G este un graf planar cu $n \geqslant 4$ vîrfuri care au gradele $d_1, d_2, \ldots, d_n$, să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leqslant 2(n + 3)^2 - 62.$$

Pentru orice $n \geqslant 4$ există un graf planar cu toate fețele triunghiulare pentru care inegalitatea devine egalitate.

10.14. Dacă G este un graf neorientat cu mulțimea vîrfurilor X de cardinal n și mulțimea muchiilor U, o λ-colorare a lui G este o funcție

$$f: X \to \{1, \ldots, \lambda\}$$

unde $\lambda \geqslant 1$ este un număr natural, cu proprietatea că dacă $[x, y] \in U$, atunci $f(x) \neq f(y)$.
Să se arate că numărul λ-colorărilor grafului G se poate exprima sub forma unui polinom de gradul n în λ, numit polinomul cromatic al grafului G și notat $P_G(\lambda)$ în modul următor:

$$P_G(\lambda) = \sum_{V \subset U} (-1)^{|V|} \lambda^{c(V)}$$

unde $c(V)$ reprezintă numărul componentelor conexe ale grafului parțial (X, V) al lui G.

10.15. G fiind un graf și $e = [x, y]$ o muchie a sa, să notăm prin $G - e$ graful obținut din G prin suprimarea muchiei e și prin $G \mid e$ graful obținut din G prin suprimarea vîrfurilor x și y și a muchiilor incidente cu aceste vîrfuri și înlocuirea lor printr-un nou vîrf z care să fie adiacent cu toate vîrfurile grafului G care erau adiacente fie cu x, fie cu y. Să se arate că:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G \mid e}(\lambda).$$

10.16. Dacă notăm cu K_n graful complet cu n vîrfuri, cu T_n un arbore cu n vîrfuri și cu C_n ciclul elementar cu n vîrfuri și n muchii, atunci:

a) $P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1)$;

b) $P_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$;

c) $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n (\lambda - 1)$.

10.17. Dacă G este un graf cu n vîrfuri, polinomul său cromatic are forma:

$$P_G(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}a_1x,$$

unde $a_i \geqslant 0$ pentru orice i.

Dacă în plus G este conex, atunci $a_i > 0$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

10.18. Să se arate că pentru orice graf G polinomul cromatic $P_G(\lambda)$ nu are nici o rădăcină în intervalul $(0, 1)$ și $P_G(\tau + 1) \neq 0$, unde $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

10.19. Indicele cromatic al unui graf G, notat $q(G)$, este cel mai mic număr de culori cu care pot fi colorate muchiile lui G, astfel încît oricare două muchii cu o extremitate comună să aibă culori diferite.

Dacă se notează cu D maximul gradelor vîrfurilor grafului G, să se arate că

$$q(G) = D \text{ sau } q(G) = D + 1$$

(Teorema lui Vizing).

10.20. Să se arate că indicele cromatic al grafului complet K_n este dat de:

$$q(K_n) = \begin{cases} n \text{ pentru } n \text{ impar;} \\ n - 1 \text{ pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

10.21. La un turneu de șah participă n șahiști. Știind că fiecare șahist trebuie să susțină cîte o partidă cu fiecare din ceilalți $n - 1$ șahiști și nu poate susține mai mult de o partidă pe zi, să se afle numărul minim de zile în care se poate termina turneul.

10.22. O k-colorare a vîrfurilor unui graf G este o partiție a mulțimii vîrfurilor cu k clase, astfel încît fiecare clasă a partiției să conțină numai vîrfuri neadiacente două cîte două.

Să se arate că numărul maxim de k-colorări ale vîrfurilor unui graf G cu n vîrfuri, avînd numărul cromatic $\chi(G) = k$, este egal cu k^{n-k}, iar graful care admite acest număr maxim de colorări este format dintr-un subgraf complet cu k vîrfuri și din $n - k$ vîrfuri izolate.

10.23. Să se arate că numărul de k-colorări ale vîrfurilor unui arbore cu n vîrfuri este egal cu $S(n - 1, k - 1)$ pentru orice $n \geqslant 2$ și $k \geqslant 2$.

10.24. Fie G un graf cu mulțimea vîrfurilor X, care nu conține nici un subgraf complet cu $k + 1$ vîrfuri. Să se demonstreze că există un graf k-cromatic H cu aceeași mulțime de vîrfuri, astfel încît

$$d_H(x) \geqslant d_G(x) \text{ pentru orice } x \in X.$$

Să se deducă de aici teorema lui Turán.

11. PROBLEME HAMILTONIENE

11.1. Graful bipartit complet $K_{n,n}$ conține

$$\frac{1}{2}(n-1)!\, n!$$

cicluri hamiltoniene.

11.2. Numărul ciclurilor hamiltoniene ale grafului complet K_n care trebuie să treacă prin h muchii date, care nu au două cîte două vîrfuri comune, este egal cu

$$(n - h - 1)!\, 2^{h-1}$$

pentru orice $0 \leqslant h \leqslant \frac{n}{2}$.

11.3. Arătați că pentru n impar, $n \geqslant 3$, muchiile grafului complet K_n pot fi acoperite prin $(n - 1)/2$ cicluri hamiltoniene fără muchii comune.

11.4. Fie G un graf cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ ale căror grade verifică inegalitățile:

$$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n.$$

Să se arate că G conține un ciclu hamiltonian dacă este satisfăcută oricare din următoarele trei condiții:

a) $d_1 \geqslant \frac{n}{2}$ (Dirac);

b) $d_p \leqslant p$, $d_q \leqslant q$ implică $d_p + d_q \geqslant n$, pentru orice $p \neq q$ (Bondy);

c) $d_k \leqslant k < \frac{n}{2}$ implică $d_{n-k} \geqslant n - k$ (Chvátal).

11.5. Fie G un graf cu $n \geqslant 2$ vîrfuri, pentru care fiecare vîrf are gradul mai mare ca $\frac{n}{2}$. Să se arate că oricare două vîrfuri ale lui G pot fi unite printr-un lanț hamiltonian.

11.6. Dacă G este un graf regulat de grad n cu $2n + 1$ vîrfuri, să se arate că G are un ciclu hamiltonian.

11.7. Fie G un graf k-conex care nu conține nici o mulțime formată din $k + 1$ vîrfuri neadiacente două cîte două ($k \geqslant 2$). Să se arate că G are un ciclu hamiltonian.

11.8. Fie G un graf cu $n \geqslant 3$ vîrfuri și m muchii. Dacă este verificată inegalitatea:

$$m \geqslant \binom{n-1}{2} + 2,$$

atunci G conține un ciclu hamiltonian și există grafuri cu $m = \binom{n-1}{2} + 1$ muchii care nu conțin cicluri hamiltoniene.

11.9. Fie G un graf cu n vîrfuri care au gradul mai mare sau egal cu k. Să se arate că:

a) G conține un ciclu elementar de lungime mai mare sau egală cu $k + 1$;

b) Dacă G este 2-conex, atunci el conține fie un ciclu hamiltonian, fie un ciclu elementar de lungime mai mare sau egală cu $2k$.

11.10. Dacă G este un graf cu n vîrfuri care are un număr de muchii mai mare ca $\frac{(n-1)k}{2}$, unde $k \geqslant 2$ este un număr natural, să se arate că G conține un ciclu elementar de lungime cel puțin egală cu $k + 1$.

11.11. G fiind un graf orientat cu n vîrfuri, astfel încît gradul de intrare $d^-(x)$ și gradul de ieșire $d^+(x)$ ale oricărui vîrf x verifică inegalitățile:

$$d^-(x) \geqslant \frac{n}{2} \text{ și } d^+(x) \geqslant \frac{n}{2},$$

să se arate că G conține un circuit hamiltonian.

11.12. Să se arate că un graf-turneu este tare conex dacă și numai dacă conține un circuit hamiltonian.

12. PERMUTĂRI

12.1. Arătați că cel mai mic întreg pozitiv r astfel încît $p^r = e$, unde e este permutarea identică, este egal cu cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclurilor permutării p.

12.2. Să se verifice că numărul permutărilor a n elemente care au k cicluri este $| s(n, k) |$.

12.3. Pentru o permutare $p \in S_m$ se notează cu $c(p)$ numărul de cicluri (inclusiv ciclurile de lungime unu) din descompunerea permutării p ca un produs de cicluri disjuncte.

Pentru orice întregi pozitivi m și n au loc egalitățile:

$$\frac{1}{m!} \sum_{p \in S_m} n^{c(p)} = \binom{n+m-1}{m};$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) n^{c(p)} = \binom{n}{m},$$

unde $\operatorname{sgn}(p)$ este signatura permutării p.

12.4. Să se arate că

$$\sum \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_p} = \frac{p!}{n!} | s(n, p) |,$$

unde suma se face după toate soluțiile în numere întregi ale ecuației:

$$x_1 + \dots + x_p = n,$$

astfel încît $x_i \geqslant 1$ pentru $i = 1, \dots, p$.

12.5. Fie $d(n, k)$ numărul permutărilor $p \in S_n$ fără puncte fixe, care conțin k cicluri.

Arătați că:

1) $d(n+1, k) = n(d(n, k) + d(n-1, k-1))$, unde $d(0,0) = 1$;

2) $d(2k, k) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)$;

3) $d(n, k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} c(n-j, k-j)$,

unde $c(n, k) = | s(n, k) | = (-1)^{n+k} s(n, k)$ este numărul permutărilor $p \in S_n$ care conțin k cicluri.

12.6. Să notăm cu S_n grupul simetric de ordinul n, adică grupul permutărilor mulțimii $\{1, \dots, n\}$.

Două permutări $s, t \in S_n$ se numesc *conjugate* dacă există o permutare $g \in S_n$ astfel încît $s = gtg^{-1}$. Să se arate că:

1) Relația de conjugare este o relație de echivalență;

2) Două permutări s și t sînt conjugate dacă și numai dacă au același număr m de cicluri și ciclurile lor au respectiv aceleași lungimi n_i pentru $i = 1,..., m$.

3) Dacă permutarea t conține în scrierea ca produs de cicluri fără elemente comune λ_1 cicluri de lungime 1,..., λ_k cicluri de lungime k ($\lambda_1 + 2\lambda_2 + ... + k\lambda_k = n$), să se arate că numărul permutărilor conjugate cu t, sau numărul permutărilor cu o aceeași structură de cicluri cu t, este egal cu:

$$h(\lambda_1,..., \lambda_k) = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2! ... \lambda_k! 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} ... k^{\lambda_k}}$$

(formula lui Cauchy).

4) Numărul claselor de echivalență ale relației de conjugare a două permutări este egal cu $P(n)$, numărul partițiilor întregului n.

12.7. Demonstrați identitatea lui Cauchy:

$$\sum_{\substack{c_1+2c_2+...=n \\ c_i \geqslant 0}} \frac{1}{c_1!c_2! ... 1^{c_1} 2^{c_2} ...} = 1.$$

12.8. Se alege la întîmplare o permutare a mulțimii $\{1, ..., n\}$. Care este probabilitatea ca ciclul care conține numărul 1 să aibă lungimea k?
(Se presupune că toate permutările mulțimii celor n numere sînt egal probabile, presupunere care va fi valabilă și pentru următoarele două probleme).

12.9. Care este probabilitatea ca o permutare aleasă la întîmplare a mulimii $\{1,..., n\}$ să conțină numerele 1 și 2 împreună într-un același ciclu?

12.10. Se alege la întîmplare o permutare a mulțimii $\{1,..., n\}$. Care este numărul său mediu de cicluri?

12.11. Se notează cu P_n numărul permutărilor $p \in S_n$ cu proprietatea că $p^2 = e$. Arătați că:

1) $P_n = P_{n-1} + (n - 1)P_{n-2}$, unde $P_0 = P_1 = 1$;

2) $P_n = n! \sum_{i+2j=n} (i!\, j!\, 2^j)^{-1}$;

3) $\sum_{n \geqslant 0} P_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right)$.

12.12. Să se arate că numărul minim de transpoziții necesare pentru scrierea unei permutări $p \in S_n$, $p \neq e$ ca produs de transpoziții este egal cu $n - c(p)$, unde $c(p)$ este numărul ciclurilor permutării p (inclusiv ciclurile de lungime 1).

12.13. Unei mulțimi $T = \{t_1,..., t_{n-1}\}$ formată din $n - 1$ transpoziții ale mulțimii $X = \{1,..., n\}$ îi vom asocia un graf neorientat (X, T) cu vîrfurile $1,..., n$ și ale cărui muchii $[i, j]$ sînt transpozițiile din mulțimea T.

Să se arate că produsul $f = t_1t_2...t_{n-1}$ este o permutare circulară a mulțimii X, dacă și numai dacă graful (X, T) este un arbore.

Să se deducă de aici că numărul de moduri în care poate fi scrisă o permutare circulară a n elemente ca un produs de $n - 1$ transpoziții este egal cu n^{n-2}.

12.14. Se notează cu $p(n, k)$ numărul permutărilor $p \in S_n$ ale mulțimii $\{1,...,n\}$ care au $I(p) = k$ inversiuni (perechi $i < j$ pentru care $p(i) > p(j)$).

Demonstrați că:

1) $\sum_{p \in S_n} I(p) = \frac{1}{2} n! \binom{n}{2}$;

2) $p(n, k) = p\left(n, \binom{n}{2} - k\right)$;

3) $p(n, k) = p(n, k-1) + p(n-1, k)$ pentru $k < n$;

4) $p(n+1, k) = p(n, k) + p(n, k-1) + \ldots + p(n, k-n)$, unde se notează $p(n, i) = 0$ pentru $i > \binom{n}{2}$ sau $i < 0$ și $p(n, 0) = 1$;

5) $\sum_{0 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}} p(n, k)x^k = (1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$.

12.15. Numărul permutărilor p ale mulțimii $\{1,..., n\}$ care au proprietatea că există exact k elemente j pentru care $p(j) > p(i)$ pentru orice $i < j$ este egal cu $|s(n, k)|$.

12.16. Să se arate că expresia $d(f, g) = \max_{i=1,...,n} |f(i) - g(i)|$, unde f și g sînt două permutări ale mulțimii $\{1,..., n\}$ definește o distanță în mulțimea S_n. Dacă se notează cu $F(n, r)$ numărul permutărilor f cu proprietatea că $d(e, f) \leqslant r$, unde e este permutarea identică, adică $|f(i) - i| \leqslant r$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, arătați că:

$F(n, 1) = F_n$ (numărul lui Fibonacci).

12.17. Se notează cu a_n numărul permutărilor p ale mulțimii $\{1,...,n\}$ care verifică $|p(i) - i| \leqslant 2$ pentru orice $i = 1,..., n$.

Să se arate că a_n este elementul situat în prima linie și în prima coloană a matricei A^n, unde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.18. Să se găsească numărul $A(n, p)$ al permutărilor mulțimii $\{1, 2,..., n\}$ care satisfac inegalitatea:

$$p(k) \leqslant k + p - 1$$

pentru $k = 1,..., n$.

12.19. O permutare sus-jos a mulțimii $\{1, 2,...,n\}$ este o permutare $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ cu proprietatea: $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4$, $a_4 > a_5$,...

Dacă se notează cu A_n numărul permutărilor sus-jos ale mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, să se arate că funcția generatoare exponențială a acestor numere este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n x^n}{n!} = \sec x + \operatorname{tg} x,$$

unde $A_0 = A_1 = 1$.

12.20. O permutare $p(1)p(2)\ldots p(n)$ a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ se numește 2-ordonată dacă $p(i) < p(i+2)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n-2$ și 3-ordonată dacă $p(i) < p(i+3)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n-3$.

Să se arate că numărul de permutări ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care sînt atît 2-ordonate cît și 3-ordonate este egal cu numărul lui Fibonacci F_n pentru orice $n \geqslant 1$ ($F_0 = F_1 = 1$ și $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pentru $n \geqslant 1$).

12.21. Se notează cu $f(n)$ numărul șirurilor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ formate cu n numere din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$ și care verifică inegalitățile:

$$u_i < u_{i+2} \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, n-2 \text{ și}$$

$$u_i < u_{i+3} \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, n-3.$$

Să se determine $f(6)$.

13. NUMĂRAREA CLASELOR DE CONFIGURAȚII RELATIVE LA UN GRUP DE PERMUTĂRI

13.1. Aparatele de perforat ale I.T.B. folosesc 9 puncte de perforare, situate în vîrfurile, mijloacele laturilor și centrul unui dreptunghi $ABCD$.

Care este numărul de moduri în care poate fi perforat un bilet pentru toate combinațiile posibile ale punctelor de perforare, știind că biletul poate fi introdus în aparat după latura AB, pe oricare din cele două fețe?

13.2. Dacă $G \subset S_n$ este un grup de permutări ale mulțimii $X = \{1, \ldots, n\}$ și $x, y \in X$, vom nota $x \sim y(G)$ dacă există o permutare $f \in G$ astfel încît $y = f(x)$. Relația astfel definită este o relație de echivalență, ale cărei clase se numesc orbitele grupului G.

Dacă $\lambda_1(g)$ este numărul ciclurilor de lungime unu ale permutării g, sau numărul elementelor din X invariate de permutarea g, numărul orbitelor unui grup $G \subset S_n$ este egal cu

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(g).$$

(W. Burnside).

13.3. Cîte poligoane convexe cu k vîrfuri pot fi formate din vîrfurile unui poligon regulat cu n vîrfuri, două poligoane cu k vîrfuri fiind considerate distincte dacă nu se obțin unul din celălalt printr-o rotație?

13.4. În cîte moduri putem colora cu k culori vîrfurile unui polion regulat cu n vîrfuri, știind că două colorări cu k culori sînt considerate distincte dacă nu se obțin una din cealaltă printr-o rotație?

13.5. Aplicînd lema lui Burnside, să se arate că:

a) Numărul grafurilor neorientate, neizomorfe două cîte două, cu n vîrfuri este dat de formula:

$$g_n = \sum_{(d)} \frac{2^{G_d}}{N_d},$$

unde suma se face după toate soluțiile (d) în numere întregi și nenegative ale ecuației

$$d_1 + 2d_2 + \ldots + nd_n = n; \tag{1}$$

$$G_d = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{n} d_k d_l (k, l) - \sum_{k \text{ impar}} d_k\right\},$$

unde (k, l) este cel mai mare divizor comun al numerelor k și l, iar

$$N_d = 1^{d_1} d_1!\ 2^{d_2} d_2! \ldots n^{d_n} d_n!; \tag{2}$$

b) Numărul grafurilor orientate cu n vîrfuri, neizomorfe două cîte două, este egal cu

$$d_n = \sum_{(d)} \frac{2^{D_d}}{N_d},$$

unde suma se face după toate soluțiile (d) în numere întregi și nenegative ale ecuației (1), iar $D_d = \sum_{k,l=1}^{n} d_k d_l (k, l) - \sum_{k=1}^{n} d_k$, N_d fiind dat de (2);

c) Un graf orientat fiind complet dacă pentru oricare două vîrfuri distincte x și y, există arcul (x, y) sau (y, x) sau ambele aceste arce, numărul grafurilor orientate și complete cu n vîrfuri, neizomorfe două cîte două este dat de:

$$c_n = \sum_{(d)} \frac{3^{C_d}}{N_d},$$

unde $C_d = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{n} d_k d_l (k, l) - \sum_{k=1}^{n} d_k - \sum_{k \text{ par}} d_k\right\}$, restul notațiilor fiind cele anterioare;

d) Numărul grafurilor orientate, complete și antisimetrice (grafuri-turneu) cu n vîrfuri, neizomorfe două cîte două, este egal cu:

$$t_n = \sum_{(d)} \frac{2^{T_d}}{N_d},$$

unde $T_d = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k,l=1}^{n} (k, l)\ d_k d_l - \sum_{k=1}^{n} d_k\right\}$,

iar suma se face după toate soluțiile (d) în numere întregi și nenegative ale ecuației:

$$d_1 + 3d_3 + 5d_5 + \ldots = n. \tag{3}$$

13.6. Fie X o mulțime de obiecte pe care le notăm $1, \ldots, n$ și A o mulțime de culori pe care le notăm $a_1, \ldots, a_m$.

Orice funcție:

$$f : X \to A$$

se numește o colorare a obiectelor din X, obiectul i fiind colorat cu culoarea $f(i)$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Dacă G este un grup de permutări ale mulțimii X vom scrie $f_1 \sim f_2$ unde f_1, f_2 sînt două colorări, dacă există o permutare $g \in G$ astfel ca $f_1 g = f_2$.

Să se arate că relația binară astfel definită este o relație de echivalență și numărul claselor acestei relații de echivalență este egal cu:

$$P(G;\ m,\ m,\ \ldots,\ m),$$

adică valoarea numerică a polinomului indicator de cicluri al grupului G pentru toate variabilele egale cu m.

Polinomul indicator de cicluri al grupului G se definește prin egalitatea:

$$P(G;\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)}\ x_2^{\lambda_2(g)} \ldots x_n^{\lambda_n(g)},$$

unde $\lambda_i(g)$ reprezintă numărul de cicluri de lungime i ale permutării $g \in G$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ (G. Pólya).

13.7. Numărul de moduri de a colora cele 6 fețe ale unui cub cu m culori, două colorări fiind considerate distincte numai dacă nu se obțin una din cealaltă printr-o rotație a cubului, este egal cu

$$\frac{1}{24}(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2).$$

13.8. Să se determine polinomul indicator de cicluri al grupului rotațiilor unui poligon regulat cu n vîrfuri și să se regăsească pe această cale, utilizînd teorema lui Pólya, rezultatul de la problema 13.4.

De asemenea, să se rezolve problema 13.1 prin aplicarea teoremei lui Pólya.

14. PROBLEME DE TIP RAMSEY

14.1. Dacă se colorează punctele planului cu 3 culori, să se demonstreze că vor exista întotdeauna două puncte de aceeași culoare situate la distanța 1.

14.2. Să se arate că oricum am colora cu 2 culori punctele planului, va exista întotdeauna un triunghi echilateral cu toate vîrfurile de aceeași culoare, dar există colorări cu 2 culori ale punctelor planului pentru care nici un triunghi echilateral de latură 1 nu are vîrfurile de aceeași culoare.

14.3. Să se arate că oricum am colora cu 2 culori punctele planului, va exista întotdeauna un triunghi echilateral de latură 1 sau $\sqrt{3}$ care are toate vîrfurile de aceeași culoare.

14.4. Oricum am alege trei numere întregi distincte două cîte două, există cel puțin două dintre acestea, fie a și b, cu $a \neq b$, astfel încît

$$a^3b - ab^3$$

să fie multiplu de 10.

14.5. Fie $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k^2+1}$ un șir de numere. Să se arate că el conține un subșir monoton cu $k + 1$ termeni.

14.6. Fie f o funcție cu valori întregi definită pe mulțimea $\{1, \ldots, 2^{n-1}\}$ cu proprietatea că pentru orice $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$ avem $1 \leqslant f(i) \leqslant i$. Să se arate că există un șir

$$1 = a_1 < \ldots < a_n \leqslant 2^{n-1}$$

pentru care $f(a_1) \leqslant \ldots \leqslant f(a_n)$, însă proprietatea nu rămîne adevărată dacă se înlocuiește 2^{n-1} prin $2^{n-1} - 1$.

14.7. Să se arate că dacă se iau 9 puncte în plan astfel încît oricare trei dintre ele să nu fie coliniare, atunci există 5 dintre ele care sînt vîrfurile unui pentagon convex.

14.8. Graful G este format din două cicluri impare C_n și C_m avînd mulțimile de vîrfuri $A_1, \ldots, A_n$, respectiv $B_1, \ldots, B_m$ și în plus mai conține toate muchiile de forma $[A_i, B_j]$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$ și $1 \leqslant j \leqslant m$.

Oricum am colora cu roșu și cu albastru cele $mn + m + n$ muchii ale grafului G astfel încît să nu se formeze nici un triunghi monocromatic, să se arate că cele $m + n$ muchii ale ciclurilor C_m și C_n sînt colorate toate fie cu roșu, fie cu albastru.

14.9. Să se demonstreze că dacă se colorează într-un mod oarecare cu roșu și cu albastru muchiile grafului complet cu $n_0 = \binom{p+q}{p}$ vîrfuri, atunci se formează fie un subgraf complet cu $p + 1$ vîrfuri cu toate muchiile roșii, fie un subgraf complet cu $q + 1$ vîrfuri cu toate muchiile albastre.

Cel mai mic număr $n \leqslant n_0$ cu această proprietate se numește numărul lui Ramsey cu parametrii $p + 1$ și $q + 1$ și se notează cu $R(p + 1, q + 1)$ pentru orice $p, q \geqslant 1$; p, q numere întregi.

14.10. Să se arate că $R(3,3) = 6$.

14.11. Numerele lui Ramsey $R(k, k)$ verifică inegalitățile:

$$2^{k/2} \leqslant R(k, k) \leqslant 2^{2k-3},$$

pentru orice $k \geqslant 2$.

14.12. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 1$ numere întregi și $k \geqslant 2$. Arătați că există un cel mai mic număr natural $n = R_k(a_1, \ldots, a_k)$ și numit numărul lui Ramsey cu parametrii $a_1, \ldots, a_k$ cu proprietatea următoare: Oricum am colora cu k culori $c_1, \ldots, c_k$ muchiile grafului complet K_n, există un indice i, $1 \leqslant i \leqslant k$ și un subgraf complet cu a_i vîrfuri al lui K_n, care are toate muchiile de culoarea c_i.

14.13. Dacă se notează $R_k(3) = R_k(3, \ldots, 3)$ să se demonstreze că:

$$R_k(3) \leqslant [k!\, e] + 1,$$

egalitatea avînd loc pentru $k = 2$ și $k = 3$.

14.14. Să se arate că $R_k(3) \geqslant 2^k + 1$.

14.15. Se repartizează numerele naturale $1, 2, \ldots, n$ în k clase într-un mod oarecare. Să se arate că dacă $n \geqslant k!\, e$, una din clase va conține trei întregi x, y, z (nu neapărat distincți), astfel încît

$$x + y = z.$$

14.16. Se colorează cu k culori toate cele $2^n - 1$ submulțimi nevide ale unei mulțimi cu n elemente.

Să se demonstreze că există un număr natural $n_0(k)$ astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0(k)$ există două submulțimi disjuncte și nevide X, Y astfel încît X, Y, $X \cup Y$ să aibă aceeași culoare.

14.17. Să notăm cu K_∞ graful complet cu o infinitate numărabilă de vîrfuri și să colorăm muchiile lui K_∞ cu r culori.

Să se arate că graful K_∞ conține un subgraf complet infinit monocromatic.

14.18. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir infinit de numere reale. Să se arate că el conține un subșir infinit care este fie strict crescător, fie strict descrescător, fie constant.

14.19. Se consideră o mulțime infinită A de puncte în spațiu. Să se arate că A conține:

a) O submulțime infinită A_1 de puncte coliniare sau:

b) O submulțime infinită A_2 de puncte coplanare cu proprietatea că oricare trei puncte nu sînt coliniare sau:

c) O submulțime infinită A_3 de puncte cu proprietatea că oricare patru puncte dintre ele nu sînt coplanare.

14.20. Să se arate că oricum am partiționa mulțimea întregilor $\{1, 2, ..., 9\}$ în două clase, cel puțin una din clase va conține o progresie aritmetică cu 3 termeni.

14.21. Să se arate că numerele lui Ramsey verifică inegalitatea

$$R(3, t) \leqslant \frac{t^2+3}{2}$$

pentru orice întreg pozitiv $t \geqslant 2$.

SOLUȚII

1. IDENTITĂȚI COMBINATORII

1.1. a) Trebuie arătat că

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k-1}^2\right\}-2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Să notăm:

$$A_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k-1}^2\right\} \text{ și } B_n=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Plecînd de la identitatea $(x+1)^n(x+1)^n=(x+1)^{2n}$ și ținînd seama de formula combinărilor complementare, obținem că pentru n par A_n este coeficientul lui x^n din dezvoltarea lui $(x+1)^{2n}$, iar B_n este coeficientul lui x^{n-1} din aceeași dezvoltare. Într-adevăr, pentru n par putem scrie:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n};$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k-1}=\binom{2n}{n-1}.$$

Deci în acest caz deducem:

$$A_n-B_n=\binom{2n}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

și identitatea este demonstrată.

Pentru n impar A_n și B_n diferă de coeficienții binomiali respectivi prin cîte un termen, deci în acest caz avem:

$$A_n=\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n+1}{2}}^2 \text{ și } B_n=\binom{2n}{n-1}-\binom{n}{\frac{n-1}{2}}^2.$$

Deoarece $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}=\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ rezultă că și în acest caz diferența A_n-B_n are aceeași valoare, egală cu $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

b) Să notăm $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$. Deducem $f(1) = 2$ și $f(n+1) =$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} \frac{1}{2^k} = f(n) +$$

$$+ \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n+1+k}{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} - \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{n+2}} = f(n) +$$

$$+ \frac{1}{2} f(n+1).$$

Deci $f(n+1) = 2f(n)$ pentru orice $n \geqslant 1$, ceea ce implică $f(n) = 2^n$. (D. Beverage, H-283, Fibonacci Quarterly, 2(16), 1978).

1.2. a) Ținem seama că numărul cuvintelor strict crescătoare $c_1c_2 \ldots c_k$ cu $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ și $c_i \in \{1, \ldots, n\}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$, este egal cu $\binom{n}{k}$. Avem $c_{k-2} \in \{k-2, k-1, \ldots, n-2\}$ și notînd cu A_q numărul cuvintelor strict crescătoare de această formă cu $c_{k-2} = q$, putem scrie:

$$\left| \bigcup_{q=k-2}^{n-2} A_q \right| = \sum_{q=k-2}^{n-2} |A_q| = \binom{n}{k}.$$

Deoarece $c_1c_2 \ldots c_{k-3}$ și $c_{k-1}c_k$ sînt cuvinte strict crescătoare cu litere din mulțimea $\{1, \ldots, q-1\}$, respectiv $\{q+1, \ldots, n\}$, rezultă că

$$|A_q| = \binom{q-1}{k-3} \binom{n-q}{2}.$$

Notînd $p = q - 1$ rezultă $k - 3 \leqslant p \leqslant n - 3$, de unde se deduce a).

b) Suma căutată se mai scrie:

$$S_n = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p \binom{2n-p}{p} = \binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \ldots = \binom{2n+1}{0} -$$

$$- \binom{2n}{1} + \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} - \binom{2n-2}{1} + \ldots = \binom{2n+1}{0} - \binom{2n}{1} +$$

$$+ \binom{2n-1}{2} - \ldots + \binom{2n-1}{0} - \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{2} - \ldots = \binom{2n+2}{0} -$$

$$- \binom{2n+1}{1} + \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} - \binom{2n-1}{1} + \ldots + \binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} +$$

$$+ \binom{2n-2}{0} + \ldots = S_{n+1} + 2S_n + S_{n-1}.$$

Deci numerele S_n verifică recurența:

$$S_{n+1} = -(S_n + S_{n-1}).$$

Deoarece $S_1 = 0$, $S_2 = -1$, $S_3 = 1$, proprietatea rezultă adevărată prin inducție după n, ținînd seama de recurența găsită.

c) Derivînd în raport cu x în ambii membri ai identității: $(1+x)^n = 1 + x\binom{n}{1} + x^2\binom{n}{2} + \ldots$, găsim: $n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots$, relații care înmulțite membru cu membru ne dau:

$$n(1+x)^{2n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j} x^{j-1}.$$

Egalînd coeficienții lui x^{n-1} din cei doi membri ai acestei identități și ținînd seama de formula combinărilor complementare se deduce c).

1.3. Putem scrie:

$$1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}\sum_{p=1}^{n}p^k=1+\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}p^k=1+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}((p+1)^r-p^r)=(n+1)^r.$$

1.4. Vom dezvolta expresia $(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n$ cu ajutorul formulei binomului lui Newton.

Dacă n este par, grupînd termenii obținem:

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=A_n+B_n\sqrt{m(m-1)}, \tag{1}$$

unde A_n, B_n sînt numere naturale.

La fel deducem:

$$(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})^n=A_n-B_n\sqrt{m(m-1)}, \tag{2}$$

care prin înmulțire membru cu membru ne dau:

$$1=A_n^2-m(m-1)\,B_n^2. \tag{3}$$

Deci dacă notăm $p=A_n^2$ și ținem seama de (3), din (1) deducem că $(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$.

Pentru n impar obținem:

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=C_n\sqrt{m}+D_n\sqrt{m-1}, \tag{4}$$

iar C_n și D_n sînt legați prin:

$$1=mC_n^2-(m-1)D_n^2. \tag{5}$$

Obținem egalitatea căutată dacă notăm $p=mC_n^2$.

1.5. Pentru a justifica prima identitate să considerăm două mulțimi disjuncte U și V astfel încît $|U|=p$, $|V|=q$, $U\cap V=\emptyset$. Numărul submulțimilor cu k elemente ale lui U este egal cu $\binom{p}{k}$ și numărul submulțimilor cu $m-k$ elemente ale lui V este egal cu $\binom{q}{m-k}$. Fiind dată o submulțime $A\subset W=U\cup V$ astfel încît $|A|=m$, dacă notăm $|A\cap U|=k$, rezultă $|A\cap V|=m-k$, unde $0\leqslant k\leqslant m$. Toate submulțimile A cu m elemente din W se obțin fără repetiții efectuînd următoarea construcție pentru $k=0,1,\ldots,m$: Se face reuniunea dintre o submulțime oarecare a lui U cu k elemente și o submulțime oarecare a lui V cu $m-k$ elemente, rezultînd în final $\binom{p}{k}\binom{q}{m-k}$ submulțimi cu m elemente ale lui W. Deci $\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{q}{m-k}$ reprezintă numărul de submulțimi cu m elemente ale mulțimii W, adică $\binom{p+q}{m}$, ceea ce demonstrează prima formulă.

O altă soluție pleacă de la identitatea:

$$(1 + x)^p(1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}.$$

Dezvoltînd cu formula binomului lui Newton se observă că identitatea 1) exprimă tocmai egalitatea coeficienților lui x^m din cei doi membri ai acestei egalități de polinoame.

2) Putem scrie:

$$\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(k-m)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!\,(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}.$$

Deci suma căutată se mai scrie:

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k} = \binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{n-k} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

3) Vom demonstra egalitatea prin inducție după m. Pentru $m = 0$ ambii membri sînt egali cu 1. Presupunînd că 3) este adevărată pentru $m = 0, 1, \ldots, p-1$ cu $p \geqslant 1$, rezultă:

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{n}{k} + (-1)^p\binom{n}{p} =$$

$$= (-1)^{p-1}\binom{n-1}{p-1} + (-1)^p\binom{n}{p} = (-1)^p\binom{n-1}{p}.$$

Am obținut că 3) este adevărată și pentru $m = p$, deci ea este adevărată pentru orice $m \geqslant 0$.

4) Vom arăta că cei doi membri ai acestei egalități numără același lucru, de unde egalitatea lor.

Membrul stîng poate fi interpretat în modul următor: Alegem k elemente dintr-o mulțime M cu $|M| = m$ elemente în $\binom{m}{k}$ moduri distincte. Vom considera o altă mulțime N cu $|N| = n$ elemente, disjunctă de M și vom alege m elemente din mulțimea N reunită cu cele k elemente alese anterior, în $\binom{n+k}{m}$ moduri distincte. Rezultă că numărul perechilor ordonate de mulțimi (X, Y) unde $X \subset M$, $Y \subset N \cup X$ cu $|X| = k$, $|Y| = m$ este egal cu $\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$.

Dacă îl luăm pe k variabil, numărul tuturor perechilor (X, Y) va fi egal cu

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}.$$

Aceeași problemă poate fi rezolvată alegînd mai întîi mulțimile $Y \cap M$ și $Y \cap N$. Dacă $|Y \cap N| = j$, obținem $0 \leqslant j \leqslant m$ și rezultă $|Y \cap M| = m - j$. Deci putem alege mulțimea Y astfel încît $|Y \cap N| = j$ și $|Y \cap M| = m - j$ în $\binom{n}{j}\binom{m}{m-j}$ moduri distincte. Mai rămîne să alegem mulțimea X care verifică:

$$Y \cap M \subset X \subset M$$

deoarece $Y \subset N \cup X$, deci $Y \cap M \subset (N \cup X) \cap M = (N \cap M) \cup (X \cap M) = \emptyset \cup X = X$. Dar mulțimea X poate fi aleasă în 2^j moduri, deoarece pentru fiecare din cele j elemente din mulțimea $M \setminus (Y \cap M)$ există exact 2 posibilități de a aparține (sau nu) mulțimii X.

Rezultă că numărul perechilor (X, Y) cu proprietățile menționate mai este egal cu:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \binom{m}{j} 2^j,$$

ceea ce demonstrează 4).

5) Putem scrie identitatea 4) ca o egalitate între două polinoame în n cu coeficienți raționali, dezvoltînd combinările de n sub forma unor polinoame în n.

Însă egalitatea 4) are loc pentru orice n număr natural, deci pentru un număr de valori mai mare ca gradul celor două polinoame din membrul stîng și respectiv din membrul drept, care este egal cu m. Deci cele două polinoame în n sînt identice. Rezultă că obținem o egalitate dacă înlocuim pe n cu $(-n-1)$ în ambii membri din 4).

Membrul stîng devine egal cu:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{-n-1+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^m \binom{n+m-k}{m} =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{m-k} \binom{n+m-k}{m} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-k}{m}.$$

Membrul drept este egal cu:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{-n-1}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k,$$

deci 5) este demonstrată.

Am folosit notația $\binom{p}{q} = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!}$ și pentru valori negative ale lui p.

6) Obținem:

$$\sum_{k \geqslant 0} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+k}{p+q} = \sum_{k \geqslant 0} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{n}{p+q-j} =$$

$$= \sum_{j \geqslant 0} \binom{n}{p-q+j} \sum_{k \geqslant 0} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{k}{j},$$

ținînd seama de identitatea 1). Mai deducem:

$$\sum_{k \geqslant 0} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{k}{j} = \sum_{k=0} \binom{p}{k} \frac{q!}{(q-k)!\, j!\, (k-j)!} = \sum_{k \geqslant 0} \binom{p}{k} \binom{q}{j} \binom{q-j}{q-k} =$$

$$= \binom{q}{j} \binom{p+q-j}{q}$$

ținînd seama de 1). Deci partea stîngă a identității de demonstrat devine egală cu:

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{p+q-j}\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}=\sum_{j\geqslant 0}\frac{n!}{(n-p-q+j)!\,(q-j)!\,(p-j)!\,j!}=$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{p}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}=\binom{n}{p}\sum_{j\geqslant 0}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}=\binom{n}{p}\binom{n}{q},$$

ținînd iarăși seama de 1).

7) Identitatea 6) este o egalitate între două polinoame în n, de gradul $p+q$. Această egalitate are loc pentru orice n număr natural, deci cele două polinoame în n sînt identice. Rezultă că obținem o egalitate dacă îl înlocuim pe n prin $(-1-n)$. Deoarece

$$\binom{-1}{p+q}=(-1)^{p+q}\binom{n+p+q-k}{p+q},\ \binom{-1-n}{p}=$$

$$=(-1)^p\binom{n+p}{p}\text{ și }\binom{-1-n}{q}=(-1)^q\binom{n+q}{q},$$

din 6) deducem 7). 8) se deduce din 7) pentru $q=p$.

1.6. Să notăm prin $S(l, m, n)$ suma din membrul stîng. Înlocuind

$$\binom{2n+2}{n+k+1}\text{ prin }\binom{2n+1}{n+k+1}+\binom{2n+1}{n+k},\text{ găsim:}$$

$$S(l, m, n+1)=2\sum_k(-1)^k\binom{2l}{l+k}\binom{2m}{m+k}\binom{2n+1}{n+k+1}\ (1).$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (1), deducem:

$$(l+n+1)(2m+1)S(l, m, n+1)=2\sum_k(-1)^k\binom{2l}{l+k}$$

$$\binom{2m+1}{m+k+1}\binom{2n+1}{n+k+1}(m+k+1)(l-k+n+k+1)=$$

$$=2\sum_k(-1)^k\binom{2l-1}{l-k-1}\binom{2m+1}{m+k+1}\binom{2n+1}{n+k+1}(m+k+1)(2l)+$$

$$+2\sum_k(-1)^k\binom{2l}{l+k}\binom{2m+1}{m+k+1}\binom{2n+1}{n+k+1}(m+k+1)(n+k+1).$$

Pentru $l>0$, deducem $\sum_k(-1)^k\binom{2l-1}{l-k-1}\binom{2m+1}{m+k+1}\binom{2n+1}{n+k+1}=0$, deoarece prin înlocuirea lui k prin $-k-1$ se observă că termenii sumei se pot grupa doi cîte doi care au suma zero, folosind și formula combinărilor complementare.

Din această cauză, ultima expresie dedusă pentru $(l+n+1)(2m+1)S(l, m, n+1)$ este simetrică în raport cu m și n, ceea ce implică: $(l+n+1)(2m+1)S(l, m, n+1)=(l+m+1)(2n+1)S(l, m+1, n)$ (2).

Acum demonstrația rezultă prin inducție după n. Pentru $n = 0$ ambii membri au valoarea $\binom{2l}{l}\binom{2m}{m}$. Presupunînd formula adevărată pentru toate tripletele (l, m, q) cu $0 \leqslant q \leqslant n$, din (2) deducem:

$$S(l, m, n+1) = \frac{(l+m+1)(2n+1)}{(l+n+1)(2m+1)} \cdot S(l, m+1, n) =$$

$$= \frac{(l+m+n+1)!\,(2l)!\,(2m)!\,(2n+2)!}{(l+m)!\,(m+n+1)!\,(n+l+1)!\,l!\,m!\,(n+1)!}.$$

(P.A. MacMahon, Quart. Journal of Pure and Appl. Math., 33 (1902), 274—288; J. Dougall, Proc. Edinburg Math. Soc., 25(1906), 114—132). Cazul $l = m = n$ a fost publicat de A.C. Dixon (Messenger of Math., 20(1891), 79—80).

1.7. Vom considera dezvoltarea:

$$(ax+b)^p (1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (ax)^{p-i} b^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j\right).$$

Coeficientul lui x^p din membrul drept este egal cu $\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{q}{i} a^{p-i} b^i$.

Însă $(ax+b)^p (1+x)^q = (x(a-b) + b(1+x))^p (1+x)^q = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (a-b)^{p-i} b^i x^{p-i} (1+x)^{q+i}$ și deci coeficientul lui x^p mai este egal cu $\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{q+i}{i} (a-b)^{p-i} b^i$, de unde rezultă egalitatea cerută.

1.8. Vom demonstra identitatea:

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i}^3 x^i = (1+x)^{2n} + \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i}\binom{2n}{2i}\binom{2n+i}{i} (1+x)^{2n-2i} x^i,$$

de unde pentru $x = -1$ se obține formula lui Dixon, adică:

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i}^3 = (-1)^n \binom{2n}{n}\binom{3n}{n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Egalînd coeficienții lui x^p în identitatea pe care trebuie să o demonstrăm, pentru $1 \leqslant p \leqslant 2n$, găsim egalitatea:

$$\binom{2n}{p}^3 = \binom{2n}{p} + \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i}\binom{2n}{2i}\binom{2n+i}{i}\binom{2n-2i}{p-i}. \tag{1}$$

Dar $\binom{2i}{i}\binom{2n}{2i}\binom{2n-2i}{p-i} = \binom{p}{i}\binom{2n-p}{i}\binom{2n}{p}$, deci identitatea (1) pe care trebuie să o demonstrăm se reduce la:

$$\binom{2n}{p}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{p}{i}\binom{2n-p}{i}\binom{2n+i}{i} \tag{2}$$

pentru orice $p = 1, \ldots, 2n$. Pentru a demonstra (2) vom utiliza identitatea din problema precedentă, în care punem:

I: $a = 0$, $b = -1$ și $q = 2n$ și II: $a = x$, $b = 1 + x$ și $q = 2n - p$.

În cazul I deducem:

$$(-1)^p \binom{2n}{p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{2n+i}{i}. \tag{3}$$

iar în cazul II se obține:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{2n-p}{i} x^{p-i} (1+x)^i = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \binom{2n-p+i}{i} (1+x)^i. \tag{4}$$

Înmulțind în ambii membri din (4) cu $(1+x)^{2n}$ și egalînd coeficienții lui x^p, se obține:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{2n-p}{i} \binom{2n+i}{i} = (-1)^p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{2n-p+i}{i} \binom{2n+i}{p}.$$

Dar

$$\binom{2n-p+i}{i} \binom{2n+i}{p} = \binom{2n+i}{i} \binom{2n}{p},$$

deci putem scrie:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{2n-p}{i} \binom{2n+i}{i} = (-1)^p \binom{2n}{p} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{2n+i}{i}.$$

Ținînd seama de (3), membrul drept este tocmai $\binom{2n}{p}^2$, ceea ce demonstrează (2), deci formula lui Dixon.
(W. Ljunggren, Nordisk Mat. Tidskr., 29(1947), 35—38).

O altă demonstrație rezultă pe baza problemei 1.6, punînd $l = m = n$. Se obține:

$$\sum_k (-1)^k \binom{2n}{n+k}^3 = \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Însă $$\sum_k (-1)^k \binom{2n}{n+k}^3 = (-1)^{-n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3$$

de unde se obține formula lui Dixon.

1.9. a) Obținem:

$$(1+x+x^2)^n = ((x+1)+x^2)^n = (x+1)^n + \binom{n}{1}(x+1)^{n-1} x^2 +$$

$$+ \binom{n}{2}(x+1)^{n-2} x^4 + \ldots + x^{2n}.$$

Rezultă că coeficientul lui x^n este egal cu $a_n = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \ldots \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} + \ldots = 1 + \frac{n(n-1)}{(1!)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2!)^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{(k!)^2} + \ldots$, forma ultimului termen depinzînd de paritatea lui n. Acest coeficient poate fi scris și sub forma:

$$a_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \binom{n}{2k}.$$

b) Să arătăm mai întîi că $a_k = a_{2n-k}$. Dacă notăm $x = \frac{1}{y}$ și înmulțim ambii membri ai dezvoltării cu y^{2n} obținem:

$$(y^2 + y + 1)^n = a_0 y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + \ldots + a_{2n},$$

de unde se deduce prin comparare cu prima dezvoltare că $a_k = a_{2n-k}$ pentru $k = 0, \ldots, 2n$.

Să facem substituția lui x prin $-x$ și obținem:

$$(1 - x + x^2)^n = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + a_{2n}\, x^{2n}.$$

Înmulțind membru cu membru această dezvoltare cu dezvoltarea dată în enunț se obține:

$$(1 + x^2 + x^4)^n = \sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \, (a_0 a_k - a_1 a_{k-1} + \ldots + (-1)^k \, a_k a_0) \, x^k.$$

Trebuie ca dezvoltarea din membrul drept să conțină numai puteri pare ale lui x, deoarece membrul stîng are această proprietate. Deci coeficientul lui x^{2n-1} din membrul drept este zero, sau:

$$-(a_0 a_{2n-1} - a_1 a_{2n-2} + a_2 a_{2n-3} - \ldots - a_{2n-1} a_0) =$$

$$= -(a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \ldots - a_{2n-1} a_{2n}) = 0, \text{ adică b).}$$

Pentru a demonstra c) să substituim în dezvoltarea din enunț pe x prin x^2 și obținem:

$$(1 + x^2 + x^4)^n = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{2n} x^{4n}.$$

Coeficientul lui x^{2n} din această dezvoltare este egal cu a_n. Ținînd seama de dezvoltarea obținută anterior pentru $(1 + x^2 + x^4)^n$, acest coeficient mai este egal cu:

$$a_0 a_{2n} - a_1 a_{2n-1} + a_2 a_{2n-2} - \ldots + a_{2n} a_0 = 2a_0^2 - 2a_1^2 + 2a_2^2 - \ldots + (-1)^n a_n^2,$$

de unde se deduce c).

d) Înmulțind în ambii membri ai egalității din enunț cu $(1 - x)^n$ obținem:

$$(1 - x^3)^n = (1 - x)^n \, (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n}\, x^{2n}),$$

deci

$$1 - \binom{n}{1} x^3 + \binom{n}{2} x^6 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{3n} = \left(1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n\right) (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n}).$$

Dacă p nu este multiplu de 3, coeficientul lui x^p din membrul stîng este zero, iar dacă $p = 3k$, acest ceficient este egal cu $(-1)^k \binom{n}{k}$.

În membrul drept acest coeficient este egal cu:

$a_p - \binom{n}{1} a_{p-1} + \binom{n}{2} a_{p-2} - \ldots + (-1)^p \binom{n}{p} a_0$, ceea ce demonstrează d).

Făcînd $x = 1$, respectiv $x = -1$ în dezvoltarea lui $(1 + x + x^2)^n$ obținem:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 3^n$$

și

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2n} = 1.$$

Adunînd și scăzînd membru cu membru aceste egalități deducem e).

Pentru a obține f) să notăm $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ una dintre rădăcinile cubice ale unității. Rezultă $\alpha^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ și $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$. Înlocuind pe x cu α deducem $(1 + \alpha + \alpha^2)^n = 0$, deci:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{2n}\,\alpha^{2n} = 0.$$

Egalînd cu zero partea reală și partea imaginară ale membrului stîng și notînd:

$$S_1 = a_0 + a_3 + a_6 + \ldots$$
$$S_2 = a_1 + a_4 + a_7 + \ldots$$
$$S_3 = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots,$$

deducem egalitățile:

$$S_1 - \frac{S_2 + S_3}{2} = 0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}(S_2 - S_3) = 0,$$

de unde $S_1 = S_2 = S_3$. Dar $S_1 + S_2 + S_3 = 3^n$, deci are loc f).

g) Dacă facem $x = i$ în dezvoltarea dată obținem

$$i^n = S_1 - S_3 + i(S_2 - S_4),$$

unde $S_1 = a_0 + a_4 + a_8 + \ldots$, $S_2 = a_1 + a_5 + a_9 + \ldots$,

$$S_3 = a_2 + a_6 + a_{10} + \ldots, S_4 = a_3 + a_7 + a_{11} + \ldots.$$

Egalînd părțile reale și părțile imaginare deducem cazurile:

1) $n \equiv 0 \pmod 4$ cînd $S_2 = S_3 = S_4 = \frac{3^n - 1}{4}$ și $S_1 = \frac{3^n + 3}{4}$;

2) $n \equiv 1 \pmod 4$ cînd $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{3^n + 1}{4}$ și $S_4 = \frac{3^n - 3}{4}$;

3) $n \equiv 2 \pmod 4$ cînd $S_1 = S_2 = S_4 = \frac{3^n - 1}{4}$ și $S_3 = \frac{3^n + 3}{4}$;

4) $n \equiv 3 \pmod 4$ cînd $S_1 = S_3 = S_4 = \frac{3^n + 1}{4}$ și $S_2 = \frac{3^n - 3}{4}$, ținînd seama de e). Deci trei sume sînt egale și a patra diferă de acestea printr-o unitate.

h) Raționăm prin inducție după n, ținînd seama că $a_k = a_{2n-k}$ pentru $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pentru $n = 2$ rezultă $a_0 = a_4 = 1$; $a_1 = a_3 = 2$; $a_2 = 3$ și proprietatea este verificată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice exponent $2 \leqslant m \leqslant n$ $(n \geqslant 2)$ și fie dezvoltarea $(1 + x + x^2)^{n+1} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{2n+2}\,x^{2n+2}$.

Deoarece $(1 + x + x^2)^{n+1} = (a_0 + a_1x + \ldots + a_{2n}\,x^{2n})(1 + x + x^2)$, deducem că $b_p = a_p + a_{p-1} + a_{p-2}$ pentru orice $0 \leqslant p \leqslant 2n + 2$, luînd $a_{-1} = a_{-2} = a_{2n+1} = a_{2n+2} = 0$. Dacă $p \leqslant n$ sau $p \geqslant n + 2$ se deduce

imediat că $b_p > b_{p-1}$, respectiv $b_p > b_{p+1}$, ținînd seama de recurența demonstrată și de ipoteza de inducție. Mai rămîne să arătăm că

$$b_{n+1} > b_n \text{ și } b_{n+1} > b_{n+2}.$$

Prima dintre aceste inegalități se mai scrie:
$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} > a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ sau $a_{n+1} > a_{n-2}$. Dar $a_{n-2} = a_{n+2}$ și inegalitatea devine $a_{n+1} > a_{n+2}$, care este adevărată conform ipotezei de inducție. A II-a inegalitate este de asemenea adevărată deoarece $b_{n+2} = b_n$.

1.10. Vom face demonstrația prin inducție după n. Pentru $n = 1$ obținem $S_0 = S_1 = \ldots = S_m = 1$ și $S_{m+1} = 0$ și formula se verifică, deoarece $1 + i \equiv 0 \pmod{(m+2)}$ și $0 \leqslant i \leqslant m + 1$ implică $i = m + 1$.

Să presupunem că formula este adevărată pentru orice exponent $p \leqslant n - 1$. Vom considera dezvoltarea:

$$(1 + x + \ldots + x^m)^{n-1} = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m(n-1)} x^{m(n-1)}.$$

Rezultă că:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{mn} x^{mn} = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m(n-1)} x^{m(n-1)})(1 + x + \ldots + x^m),$$

de unde obținem recurența:

$$a_i = b_i + b_{i-1} + \ldots + b_{i-m}, \tag{1}$$

unde $b_j = 0$ pentru $j < 0$ sau pentru $j > m(n-1)$.

Ținînd seama de definiția sumelor S_i, relația (1) ne conduce la recurența:

$$S_i = T_i + T_{i-1} + \ldots + T_{i-m}, \tag{2}$$

unde am notat:

$T_i = b_i + b_{i+(m+2)} + b_{i+2(m+2)} + \ldots$ iar în (2) indicii lui T se calculează modulo $m + 2$.

Vom analiza două cazuri:

a) n este par. Conform ipotezei de inducție este valabilă expresia sumelor S_i pentru $p = n - 1$ deci suma T_i, unde $n - 1 + i \equiv 0 \pmod{(m+2)}$ este mai mică cu o unitate decît celelalte sume, care sînt toate egale între ele.

Deoarece au loc relațiile (2), rezultă că suma S_j, unde $j \equiv i - 1 \pmod{(m+2)}$ este mai mare cu o unitate decît toate celelalte sume care sînt egale între ele. Deci $j \equiv i - 1 \equiv -n \pmod{(m+2)}$, adică $j + n \equiv 0 \pmod{(m+2)}$, și $S_j = \frac{(m+1)^n - 1}{m+2} + 1$, iar celelalte sume sînt egale cu $\frac{(m+1)^n - 1}{m+2}$, deoarece $S_0 + S_1 + \ldots + S_{m+1} = (1 + 1 + \ldots + 1)^n = (m+1)^n$. Deci proprietatea este adevărată și pentru n.

b) Dacă n este impar, conform ipotezei de inducție suma T_i este mai mare cu o unitate decît celelalte sume care sînt toate egale între ele. Rezultă analog ca mai înainte că suma S_j, unde $j + n \equiv 0 \pmod{(m+2)}$, este mai mică cu o unitate decît celelalte sume, care sînt egale între ele.

Deci $S_j = \frac{(m+1)^n + 1}{m+2} - 1$, iar celelalte sume sînt egale cu $\frac{(m+1)^n + 1}{m+2}$.

În ambele cazuri expresia sumelor S_i este valabilă pentru n și proprietatea

este adevărată pentru orice n număr natural. Dacă luăm $m = 1$, dezvoltînd cu formula binomului lui Newton găsim:

$$S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$S_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$$

Proprietatea demonstrată implică faptul că pentru orice n, două din aceste sume sînt egale, iar a treia diferă de acestea printr-o unitate.

Pentru $m = 2$ se regăsește rezultatul de la punctul g) din problema precedentă.

1.11. Ținînd seama de modul de desfacere a parantezelor, rezultă că coeficientul căutat este egal cu numărul de moduri în care k poate fi scris ca sumă a doi întregi nenegativi:

$$k = a_1 + a_2$$

unde $0 \leqslant a_1, a_2 \leqslant n - 1$, două scrieri fiind distincte dacă ele diferă și prin ordinea termenilor. Dacă $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ aceste scrieri sînt $0 + k$, $1 + (k - 1)$, ... $k + 0$, în număr de $k + 1$. Dacă însă $n \leqslant k \leqslant 2n - 2$ scrierile: $0 + k$, $1 + (k - 1)$ ..., $(k - n) + n$ și cele obținute din acestea prin permutarea între ei a celor 2 termeni nu verifică condiția ca $a_1, a_2 \leqslant n - 1$. Deci numărul de scrieri este egal în acest caz cu:

$$k + 1 - 2(k - n + 1) = 2n - k - 1.$$

Se observă că în ambele cazuri coeficientul lui x^k se poate scrie sub forma:

$$n - |n - k - 1|.$$

1.12. Valorile $a_1, \dots, a_r$ se obțin în modul următor:
Fie a_1 cel mai mare întreg x care verifică inegalitatea:

$$n \geqslant \binom{x}{r}.$$

Cu a_2 vom nota cel mai mare întreg x astfel încît:

$$n - \binom{a_1}{r} \geqslant \binom{x}{r-1}$$

ș.a.m.d.
Cu a_r vom nota diferența: $n - \left[\binom{a_1}{r} + \binom{a_2}{r-1} + \dots + \binom{a_{r-1}}{2}\right] = \binom{a_r}{1} = a_r$.
Să arătăm că $a_1 > a_2$, restul inegalităților $a_2 > a_3 > \dots > a_r$ se vor demonstra în același mod. Faptul că $a_r \geqslant 0$ rezultă din definiția lui a_{r-1}. Obținem:

$$\binom{a_1 + 1}{r} > n \text{ și de asemenea: } n - \binom{a_1}{r} \geqslant \binom{a_2}{r-1},$$

deci putem scrie:

$$\binom{a_1 + 1}{r} - \binom{a_1}{r} > \binom{a_2}{r-1}, \text{ adică: } \binom{a_1}{r-1} > \binom{a_2}{r-1}.$$

Această inegalitate implică $a_1 > a_2$, ținînd seama de definiția combinărilor.

Să presupunem prin reducere la absurd că mai există o scriere distinctă de cea dată în enunț a lui n ca sumă de combinări:

$$\binom{a_1}{r}+\binom{a_2}{r-1}+\ldots+\binom{a_r}{1}=\binom{b_1}{r}+\binom{b_2}{r-1}+\ldots+\binom{b_r}{1}, \tag{1}$$

unde $(a_1, \ldots, a_r) \neq (b_1, \ldots, b_r)$. Putem presupune de exemplu că $a_1 > b_1$, deoarece dacă $a_1 = b_1$ termenii corespunzători pot fi reduși și se repetă același procedeu pentru a_2 și b_2.

Deoarece $b_1 > b_2 > \ldots > b_r \geqslant 0$ rezultă că $b_1 - i \geqslant b_{i+1}$ pentru $i = 1, \ldots, r-1$ și deci:

$$\binom{b_1}{r}+\binom{b_2}{r-1}+\ldots+\binom{b_r}{1} \leqslant \binom{b_1}{r}+\binom{b_1-1}{r-1}+\ldots+\binom{b_1-(r-1)}{1}.$$

Ținînd seama de (1), această ultimă inegalitate implică:

$$\binom{a_1}{r} \leqslant \binom{b_1}{r}+\binom{b_1-1}{r-1}+\ldots+\binom{b_1-(r-1)}{1} \tag{2}$$

Deoarece $a_1 \geqslant b_1 + 1$ obținem:

$$\binom{a_1}{r} \geqslant \binom{b_1+1}{r}$$

și deci inegalitatea (2) implică:

$$\binom{b_1+1}{r} \leqslant \binom{b_1}{r}+\binom{b_1-1}{r-1}+\ldots+\binom{b_1-r(-1)}{1} \tag{3}$$

Însă aplicînd relația de recurență a numerelor binomiale, deducem:

$$\binom{b_1+1}{r}=\binom{b_1}{r}+\binom{b_1}{r-1}=\binom{b_1}{r}+\binom{b_1-1}{r-1}+\binom{b_1-1}{r-2}=$$
$$=\ldots=\binom{b_1}{r}+\binom{b_1-1}{r-1}+\ldots+\binom{b_1-(r-1)}{1}+\binom{b_1-(r-1)}{0},$$

ceea ce contrazice inegalitatea (3).

Deci valorile $a_1, \ldots, a_r$ sînt unic determinate și proprietatea este demonstrată.

1.13. Identitatea se mai scrie:

$$(x+y)^{2n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}(x^k+y^k)(xy)^{n-k}(x+y)^k.$$

Coeficientul termenului $x^{2n-m}y^m$ obținut prin dezvoltarea lui $(x+y)^{2n}$ cu ajutorul formulei binomului lui Newton este egal cu $\binom{2n}{m}$. În membrul drept, ținînd seama de dezvoltarea lui $(x+y)^k$ și de formula combinărilor complementare, găsim că acest coeficient este egal cu:

$$\alpha(n, m)=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\left[\binom{k}{n-m}+\binom{k}{m-n}\right].$$

Dacă $n = m$ obținem $\alpha(n, n) = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1} = 2\left[\binom{2n-2}{n-1}+\right.$

$$\left.+\binom{2n-3}{n-1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right]=2\left[\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-2}{n}+\binom{2n-2}{n}-\binom{2n-3}{n}+\right.$$

$+ \ldots + \left[\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n} + \binom{n-1}{n-1}\right] = 2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$ și egalitatea coeficienților este demonstrată.

Dacă de exemplu $m \leqslant n-1$ obținem $\binom{k}{m-n} = 0$ și trebuie să demonstrăm că:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1}\binom{k}{n-m} = \binom{2n}{m} = \binom{2n}{2n-m}. \tag{1}$$

Dar $\binom{2n}{2n-m}$ numără cuvintele strict crescătoare $c_1c_2 \ldots c_{2n-m}$ ($c_1 < c_2 < \ldots < c_{2n-m}$) formate cu litere din alfabetul $\{1, 2 \ldots 2n\}$. Să notăm cu A_k mulțimea acestor cuvinte cu proprietatea că $c_{n-m+1} = k+1$ pentru $k = 1, \ldots, n$. Deoarece $m \leqslant n-1$ obținem $n-m+1 \geqslant 2$ și deci $k+1 \geqslant 2$, de unde $k \geqslant 1$.

De asemenea $2n-m-(n-m+1) = n-1$, deci valoarea maximă a lui $k+1$ este $2n-m-(n-1) = n-m+1 \leqslant n$, deoarece cuvîntul este strict crescător, cu condiția ca $m \geqslant 1$. Dar dacă $m = 0$ coeficienții lui x^{2n} din ambii membri sînt egali cu 1 și egalitatea este verificată. Rezultă că mulțimea cuvintelor strict crescătoare $c_1c_2 \ldots c_{2n-m}$ formate cu litere din alfabetul $\{1, \ldots, 2n\}$ se poate scrie și ca $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Deci:

$$\binom{2n}{2n-m} = \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|, \tag{2}$$

mulțimile A_k fiind disjuncte două cîte două.

Dacă $c_{n-m+1} = k+1$, rezultă că literele $c_1, \ldots, c_{n-m}$ se aleg mai mici decît c_{n-m+1}, deci $c_1 \ldots c_{n-m}$ este un cuvînt strict crescător format cu litere din alfabetul $\{1, \ldots, k\}$. La fel $c_{n-m+2} \ldots c_{2n-m}$ este un cuvînt strict crescător de lungime $n-1$ format cu litere din mulțimea $\{k+2, \ldots, 2n\}$ de cardinal $2n-k-1$. Deci cuvîntul $c_1 \ldots c_{n-m}$ se poate alege în $\binom{k}{n-m}$ moduri, iar cuvîntul $c_{n-m+2} \ldots c_{2n-m}$ se poate alege în $\binom{2n-k-1}{n-1}$ moduri distincte, ceea ce implică:

$$|A_k| = \binom{2n-k-1}{n-1}\binom{k}{n-m}.$$

Ținînd seama de (2) rezultă (1).

Dacă $m \geqslant n+1$ obținem $\binom{k}{n-m} = 0$ și se face schimbarea de variabilă $p = 2n-m \leqslant n-1$, deci (1) se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1}\binom{k}{n-p} = \binom{2n}{2n-p},$$

adică: $\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1}\binom{k}{m-n} = \binom{2n}{m}$

sau $\alpha(n, m) = \binom{2n}{m}$ și în acest caz.

(L. Toscano, Boll. Soc. Math. Calabrese, 16(1965), 1–8).

1.14. Putem scrie $\binom{n-1}{k}(k+1)! = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}(k+1) =$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}(n-(n-k-1)) = \frac{n!}{(n-k-1)!} - \frac{(n-1)!}{(n-k-2)!},$$

pentru $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

Suma căutată devine:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} n^{n-1-k}(k+1)! = \sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{n!}{(n-k-1)!} - \frac{(n-1)!}{(n-k-2)!}\right] n^{n-1-k} + n! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k-1)!} n^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{(n-k-2)!} n^{n-1-k} = n^n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} n^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{(n-k-2)!} n^{n-1-k} = n^n.$$

(J. Riordan, Annals of Math. Statist., 33 (1962), 178—185).

1.15. Cele n_1 obiecte din prima cutie pot fi alese în $\binom{n}{n_1}$ moduri, cele n_2 obiecte din a II-a cutie pot fi alese din cele $n - n_1$ obiecte rămase în $\binom{n-n_1}{n_2}$ moduri etc. Numărul total de aranjări este egal cu

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_p!}.$$

1.16. Vom considera produsul:

$$(a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_p^1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2)\ldots(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n) =$$

$$= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_p \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_p=n}} (a_1^{i_1} a_1^{i_2}\ldots a_1^{i_{n_1}})(a_2^{j_1} a_2^{j_2}\ldots a_2^{j_{n_2}})\ldots(a_p^{k_1} a_p^{k_2}\ldots a_p^{k_{n_p}}),$$

unde indicii superiori nu indică puteri, iar

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\} \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\} \cup \ldots \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n_p}\}$$

este o partiție a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$, care poate conține și clase vide.

Deci ultima sumă indică, ținînd seama de indicii superiori din fiecare paranteză, o aranjare a mulțimii de obiecte $\{1, \ldots, n\}$ în p cutii $y_1, y_2, \ldots, y_p$, astfel încît y_1 să conțină n_1 obiecte, ..., y_p să conțină n_p obiecte.

Într-adevăr, dacă punem obiectele $i_1, \ldots, i_{n_1}$ în cutia y_1, ..., obiectele $k_1, \ldots, k_{n_p}$ în cutia y_p, obținem o astfel de aranjare și în acest mod, ținînd seama de modul de desfacere a parantezelor, se obțin fără repetiții toate cele

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_p!}$$

aranjări a n obiecte în p cutii, care conțin respectiv $n_1, \ldots, n_p$ obiecte. Dacă luăm $a_i^1 = a_i^2 = \ldots = a_i^p = a_i$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant p$, suma considerată devine

$$\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_p \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_p=n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_p} a_1^{n_1} a_2^{n_2}\ldots a_p^{n_p},$$

unde acum indicii superiori indică puteri, deoarece pentru fiecare scriere a lui n sub forma $n = n_1 + \ldots + n_p$, se obțin $\binom{n}{n_1, \ldots, n_p}$ termeni egali cu $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p}$.

1.17. Să considerăm toate scrierile lui m ca o sumă de h întregi pozitivi, al căror număr este egal, conform problemei 1.19, cu $\binom{m-1}{h-1}$. Dacă notăm cu s_i numărul termenilor egali cu i dintr-o astfel de sumă, obținem $s_1 + \ldots + s_k = h$ și $s_1 + 2s_2 + \ldots + ks_k = m$, unde k reprezintă termenul maxim din sumă.

Dacă numerele s_i avînd aceste proprietăți sînt fixate, numărul de moduri în care poate fi scris m ca o sumă de h termeni pozitivi, astfel încît s_i termeni să fie egali cu i pentru orice $i \geqslant 1$, este egal cu numărul de aranjări ale unei mulțimi de h obiecte într-o mulțime de k cutii, astfel încît prima cutie să conțină s_1 obiecte, a II-a cutie să conțină s_2 obiecte ș.a.m.d., adică cu

$$\binom{h}{s_1, \ldots, s_k}.$$

Deci identitatea propusă este adevărată, cei doi membri numărînd, în două moduri diferite, scrierile lui m ca sumă de h întregi pozitivi.

1.18. Fie $N = \{1, \ldots, n\}$, $R = \{1, \ldots, r\}$ și $C(N, R)$ mulțimea funcțiilor crescătoare $f : N \to R$. Vom identifica funcția crescătoare f cu cuvîntul crescător $b_1 b_2 \ldots b_n$, unde $b_i = f(i)$ pentru $i = 1 \ldots, n$. Deoarece f este crescătoare rezultă că $1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant r$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

Vom defini aplicația

$$F : C(N, R) \to P_n(X),$$

unde $P_n(X)$ este familia submulțimilor cu n elemente ale mulțimii $X = \{1, 2, \ldots, r + n - 1\}$, în modul următor:

$$F(b_1 b_2 \ldots b_n) = \{b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \ldots, b_n + (n-1)\}.$$

Deoarece $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ rezultă că $b_1 < b_2 + 1 < b_3 + 2 < \ldots < b_n + (n-1)$, deci imaginea unei funcții f prin F este într-adevăr o submulțime cu n elemente a lui X.

Dacă $b_1 b_2 \ldots b_n \neq c_1 c_2 \ldots c_n$, ambele fiind cuvinte crescătoare, rezultă că există un indice i astfel încît să avem de exemplu $b_1 = c_1, \ldots, b_{i-1} = c_{i-1}$ și $b_i < c_i$, unde $1 \leqslant i \leqslant n$.

Deci $b_i + (i-1) < c_i + (i-1)$ și $b_i + (i-1) \notin F(c_1, \ldots c_n)$.

Obținem că $F(b_1 \ldots b_n) \neq F(c_1 \ldots c_n)$ și deci aplicația F este injectivă. Dacă $Y \subset X$ verifică $|Y| = n$, fie $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ și $1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n \leqslant r + n - 1$.

Notînd $b_i = y_i - (i-1)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$ găsim că $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ și $b_i \in R$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$. Conform definiției aplicației F deducem că $F(b_1 \ldots b_n) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, de unde rezultă că F este și surjectivă.

Deoarece F este o bijecție, rezultă că numărul funcțiilor crescătoare

$$f : N \to R$$

este egal cu $|P_n(X)| = \binom{n+r-1}{n} = \frac{[r]^n}{n!}$.

1.19. Să notăm sumele parțiale:

$$s_p = \sum_{k=1}^{p} u_k$$

pentru orice $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. Fiecare scriere a lui m ca sumă de n întregi este definită de cuvîntul $s_1 s_2 \ldots s_{n-1}$, deoarece $u_1 = s_1$, $u_n = m - s_{n-1}$ și $u_k = s_k - s_{k-1}$ pentru $2 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Dacă $u_i \geqslant 0$ pentru orice i, obținem

$$0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{n-1} \leqslant m,$$

deci numărul căutat va fi egal cu numărul de cuvinte crescătoare de lungime $n - 1$, formate din litere din mulțimea $\{0, 1, \ldots, m\}$, de cardinal $m + 1$, adică cu combinări cu repetiție de $m + 1$ luate cîte $n - 1$ (problema 1.18), deci cu

$$\frac{[m+1]^{n-1}}{(n-1)!} = \binom{m+n-1}{m}.$$

Dacă $u_i > 0$ pentru orice i, cuvîntul $s_1 \ldots s_{n-1}$ este strict crescător, deoarece

$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \leqslant m - 1.$$

Rezultă că numărul modurilor în care poate fi scris m ca o sumă de n întregi pozitivi este egal cu numărul cuvintelor strict crescătoare formate din $n - 1$ litere care pot fi alese dintr-un alfabet cu $m - 1$ litere și anume $\{1, 2, \ldots, m - 1\}$, adică cu $\binom{m-1}{n-1}$.

1.20. Cu formula multinomului obținem:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_p \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_p} x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p}.$$

Rezultă că numărul monoamelor din dezvoltarea polinomului $(x_1 + \ldots + x_p)^n$ este egal cu numărul scrierilor lui n de forma:

$$n = n_1 + \ldots + n_p$$

unde numerele întregi $n_i \geqslant 0$, două scrieri deosebindu-se și prin ordinea termenilor. Conform problemei anterioare, acest ultim număr este egal cu combinări cu repetiție de $n + 1$ luate cîte $p - 1$.

Obținem deci numărul de termeni egal cu:

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{(p-1)!} = \binom{n+p-1}{p-1}.$$

Pentru $p = 2$ obținem $\binom{n+1}{1} = n + 1$ termeni, așa cum rezultă și din formula binomului lui Newton.

1.21. Fie $f(x) = 2\left[\binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \ldots + \binom{x-1}{n}\right]$.

Deoarece pentru $m < n$ avem $\binom{m}{n} = 0$ și ținînd seama de suma coeficienților binomiali, deducem că pentru orice $1 \leqslant x \leqslant n+1$, x întreg, avem $f(x) = 2^x$.

Termenul de grad maxim al polinomului $f(x)$ este conținut în dezvoltarea $2\binom{x-1}{n} = 2\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}$, deci are gradul n. Deoarece polinomele $f(x)$ și $P(x)$ sînt ambele de gradul n și iau aceleași valori pentru $n+1$ valori distincte ale lui x, rezultă că ele sînt identice. Deci $P(n+2) = 2\left[\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{n}\right] = 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2$.

(M. Klamkin, Pi Miu Epsilon, 4(1964), 77, problema 158).

1.22. Dacă notăm suma din membrul stîng prin a_n, deducem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \left(\sum_{m=0}^{\infty} m t^m\right)^k = \left[t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]^k = \frac{t^k}{(1-t)^{2k}} = t^k(1-t)^{-2k}.$$

Dezvoltînd pe $(1-t)^{-2k}$ cu formula generalizată a binomului lui Newton, găsim că coeficientul lui t^n din expresia $t^k(1-t)^{-2k}$ este egal cu

$$(-1)^{n-k}\binom{-2k}{n-k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(2k+1)2k}{(n-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{(2k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}.$$

1.23. Coeficientul lui x^r din dezvoltarea $(1 + x + x^2 + \ldots)^n$ va fi egal cu numărul de moduri în care poate fi scris r ca o sumă de n întregi nenegativi:

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$

cu $r_i \geqslant 0$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$. Conform problemei 1.19 acest număr este egal cu $\binom{n+r-1}{r}$.

1.24. Ținînd seama că $\log\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$, rezultă că $\frac{1}{n}$ este coeficientul lui x^n din această dezvoltare. Însă $\log\frac{1}{1-x} = \log(1 + x + x^2 + \ldots)$, deci coeficientul lui x^n din dezvoltarea acestui logaritm coincide cu coeficientul lui x^n din dezvoltarea $\log(1 + (x + x^2 + \ldots + x^n)) = (x + x^2 + \ldots + x^n) - \frac{(x+\ldots+x^n)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x+\ldots+x^n)^n}{n} + \ldots$.

În continuare putem renunța din nou la puterile mai mari ca n.

Obținem că coeficientul lui x^n din dezvoltarea $(-1)^{p+1}\frac{(x+\ldots+x^n)^p}{p}$ este egal cu $\sum (-1)^{j_1+\ldots+j_n+1}\binom{j_1+\ldots+j_n}{j_1,\ldots,j_n}\frac{1}{p}$, unde suma se face după $j_i \geqslant 0$ cu $j_1 + \ldots + j_n = p$ și $j_1 + 2j_2 + \ldots + nj_n = n$, ținînd seama de formula multinomului (problema 1.16).

Însă acest coeficient este egal cu:

$$\sum (-1)^{j_1+\ldots+j_n+1} \frac{(j_1+j_2+\ldots+j_n-1)!}{j_1!\,j_2!\ldots j_n!}.$$

Făcîndu-l pe p să ia valorile $p = 1, \ldots, n$, se obține suma din membrul stîng al formulei din enunț.

(J. Sheehan, Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 168).

1.25. Dacă există două numere naturale n_i și n_j astfel încît $n_i \geqslant n_j + 2$, obținem inegalitatea:

$$\binom{n_i}{h} + \binom{n_j}{h} > \binom{n_i - 1}{h} + \binom{n_j + 1}{h}$$

sau: $\binom{n_i}{h} - \binom{n_i - 1}{h} > \binom{n_j + 1}{h} - \binom{n_j}{n}$, ceea ce este echivalent cu

$\binom{n_i - 1}{h - 1} > \binom{n_j}{h - 1}$ ținînd seama de formula de recurență a combinărilor.

Ultima inegalitate este adevărată, deoarece $n_i - 1 \geqslant n_j$. Această proprietate ne arată că minimul căutat se atinge atunci cînd numerele $n_1, \ldots, n_k$ verifică inegalitatea $-1 \leqslant n_i - n_j \leqslant 1$ pentru orice $i, j = 1, \ldots k$, adică r numere sînt egale cu $t + 1$ și $k - r$ numere sînt egale cu $t = \left[\frac{n}{k}\right]$. De asemenea, pentru a obține maximum trebuie să nu existe două numere n_i, n_j ambele mai mari ca 1, deoarece înlocuindu-le respectiv prin $n_i + 1$ și $n_j - 1$ obținem o sumă mai mare. Deci maximum se atinge pentru o scriere a lui n de forma: $n = (n - k + 1) + 1 + \ldots + 1$.

1.26. Să arătăm mai întîi că părțile $m_1, m_2, \ldots, m_k$ din scrierea lui n de forma:

$$n = m_1 + \ldots + m_k.$$

și care maximizează, pentru un k fixat, produsele de la a) și b) sînt cît mai egale posibil, adică avem:

$$-1 \leqslant m_i - m_j \leqslant 1 \tag{1}$$

pentru orice $i, j = 1, \ldots, k$.

Într-adevăr, presupunînd contrariul, există doi indici i, j astfel încît să avem $m_i \geqslant m_j + 2$. În acest caz putem scrie:

$(m_i - 1)(m_j + 1) = m_i m_j + m_i - (m_j + 1) \geqslant m_i m_j$, ceea ce contrazice maximalitatea produsului $m_1 m_2 \ldots m_k$.

De asemenea vom demonstra că:

$$\binom{m_i - 1}{2}\binom{m_j + 1}{2} \geqslant \binom{m_i}{2}\binom{m_j}{2},$$

ceea ce este echivalent cu $(m_i - 2)(m_j + 1) > m_i(m_j - 1)$, sau făcînd reducerile de termeni asemenea obținem $m_i > m_j + 1$, inegalitate adevărată conform ipotezei făcute. Deci produsul

$$\binom{m_1}{2}\binom{m_2}{2}\ldots\binom{m_k}{2}$$

nu poate fi maxim, ceea ce demonstrează inegalitățile (1). Să considerăm acum cazul a) și k variabil. Obținem $\max(m_1, \ldots, m_k) \leqslant 4$ deoarece în caz contrar am avea $5 < 3 \cdot 2$, ceea ce contrazice maximalitatea produsului considerat. De asemenea nu pot exista $m_i = m_j = 4$ deoarece $4 \cdot 4 = 16 <$

$< 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. La fel nu pot exista 3 numere m_i egale cu 2 căci $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 < 3 \cdot 3 = 9$. Să observăm că $2 \cdot 2 = 4$, deci aproape toate numerele $m_1, \ldots, m_k$ sînt egale cu 3 și eventual un singur număr $m_i = 2$ sau două numere sînt egale cu 2 (sau unul singur este egal cu 4). Deci notînd cu $A(n)$ valoarea maximului în cazul a) găsim:

$$A(n) = 3^{n/3} \text{ pentru } n \equiv 0 \pmod 3;$$
$$A(n) = 4 \cdot 3^{(n-4)/3} \text{ pentru } n \equiv 1 \pmod 3;$$
$$A(n) = 2 \cdot 3^{(n-2)/3} \text{ pentru } n \equiv 2 \pmod 3.$$

Vom proceda în mod analog în cazul b).

Să arătăm mai întîi că $\max(m_1, \ldots, m_k) \leqslant 7$.

Într-adevăr, dacă există $m_i \geqslant 8$ găsim:

$$\binom{m}{2} < \binom{5}{2}\binom{m-5}{2}$$

ceea ce este echivalent cu $m^2 - m < 10(m-5)(m-6)$ sau $9m^2 - 109m + 300 > 0$.

Acest trinom are două rădăcini reale cuprinse în intervalul $(3, 8)$, ceea ce demonstrează inegalitatea scrisă. Deci dacă există $m_i \geqslant 8$ produsul combinărilor de la b) nu poate fi maxim, deoarece putem înlocui partea egală cu m_i prin două părți egale respectiv cu 5 și cu $m_i - 5$ și produsul combinărilor crește.

Deoarece $\binom{5}{2} > \binom{3}{2}\binom{2}{2}$; $\binom{6}{2} > \binom{3}{2}\binom{3}{2}$ și $\binom{7}{2} > \binom{3}{2}\binom{4}{2}$, rezultă că pentru $n \leqslant 7$ maximul căutat este egal cu $\binom{n}{2}$. Dacă $n \geqslant 8$, în cazul maximului avem $\max(m_1, \ldots, m_k) \leqslant 6$, deoarece în caz contrar există $m_i = 7$. Am văzut însă că are loc relația (1), deci mai trebuie să existe cel puțin un număr m_j egal cu 6 sau cu 7.

În primul caz avem:

$$315 = \binom{7}{2}\binom{6}{2} < \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 360.$$

Obținem de asemenea:

$$441 = \binom{7}{2}\binom{7}{2} < \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 600,$$

deci nu se poate atinge maximul de la b).

Să mai observăm că cel mult două dintre numerele m_i pot fi egale cu 4 sau cu 6, deoarece există inegalitățile:

$$3375 = \binom{6}{2}\binom{6}{2}\binom{6}{2} < \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 3600 \text{ și}$$
$$216 = \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} < \binom{6}{2}\binom{6}{2} = 225.$$

Dacă $n \geqslant 8$ nici unul dintre numerele m_i nu poate fi egal cu 3 sau cu 2. De exemplu, presupunînd că există $m_i = 3$, conform (1) mai trebuie să existe un număr $m_j \in \{2, 3, 4\}$ și obținem:

$$3 = \binom{2}{2}\binom{3}{2} < \binom{5}{2} = 10; \quad 9 = \binom{3}{2}\binom{3}{2} < \binom{6}{2} = 15;$$
$$18 = \binom{3}{2}\binom{4}{2} < \binom{7}{2} = 21.$$

În concluzie, aproape toate numerele m_i sînt egale cu 5, iar cel mult două dintre ele sînt egale cu 4 sau cu 6, astfel încît relația (1) să fie verificată. Rezultă că dacă notăm $B(n)$ maximul în cazul b), obținem:

$$B(n) = \binom{n}{2} \text{ pentru } n \leqslant 7 \text{ și pentru } n \geqslant 8 \text{ avem situațiile:}$$

1) $B(n) = 10^{n/5}$ pentru $n \equiv 0 \pmod 5$ și $m_1 = \ldots = m_k = 5$;
2) $B(n) = 15 \cdot 10^{(n-6)/5}$ pentru $n \equiv 1 \pmod 5$ și $m_1 = 6$; $m_2 = \ldots = m_k = 5$;
3) $B(n) = 225 \cdot 10^{(n-12)/5}$ pentru $n \equiv 2 \pmod 5$ și $m_1 = m_2 = 6$; $m_3 = \ldots = m_k = 5$;
4) $B(n) = 36 \cdot 10^{(n-8)/5}$ pentru $n \equiv 3 \pmod 5$ și $m_1 = m_2 = 4$; $m_3 = \ldots = m_k = 5$;
5) $B(n) = 6 \cdot 10^{(n-4)/5}$ pentru $n \equiv 4 \pmod 5$ și $m_1 = 4$; $m_2 = \ldots = m_k = 5$.

Dacă se consideră

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \max_{n_1 + \ldots + n_k = n} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{h}$$

se poate arăta că pentru n suficient de mare, acest maxim se atinge pentru acea scriere a lui n care verifică (1) și în plus aproape toate numerele m_i sînt egale cu $2h + o(h)$. Numărul $o(h)$ verifică relația:

$$\lim_{h \to \infty} \frac{o(h)}{\ln h} = \frac{1}{2}.$$

(I. Tomescu, Discrete Mathematics, 1981, în curs de publicare).

De exemplu, pentru $h = 3$ aproape toate numerele m_i sînt egale cu 7 pentru n suficient de mare.

1.27. Trecînd la combinările complementare, inegalitatea devine:

$$\binom{n_1 - x}{h - x}\binom{n_2 - y}{h - y} \geqslant \binom{2h}{x + y}.$$

Deoarece $n_1 \geqslant 3h$ și $n_2 \geqslant 3h$, este suficient să arătăm că

$$\binom{3h - x}{h - x}\binom{3h - y}{h - y} \geqslant \binom{2h}{x + y}.$$

Fie $x + y = k$ (const.), unde $0 \leqslant k \leqslant 2h$.

Avem: $$\binom{3h - x}{h - x}\binom{3h - y}{h - y} = \binom{3h - x}{2h}\binom{3h - y}{2h} =$$

$$= \frac{(3h - x)(3h - y)(3h - x - 1)(3h - y - 1) \ldots (h - x + 1)(h - y + 1)}{((2h)!)^2}.$$

Grupînd factorii doi cîte doi în ordinea scrierii, se observă că suma a cîte 2 factori este constantă și egală respectiv cu $6h - k$, $6h - k - 2$, ..., $2h - k + 2$. Deci produsele devin minime cînd factorii diferă cît mai mult între ei.

Distingem două cazuri:

a) $k \leqslant h$. În acest caz produsele a cîte doi factori devin simultan minime pentru $x = 0$, $y = k$ sau $x = k$, $y = 0$.

Fie $x = 0$, $y = k$ și în acest caz este suficient să demonstrăm că

$$\binom{3h}{h}\binom{3h - k}{h - k} \geqslant \binom{2h}{k}.$$

Dar $$\binom{3h}{h} > \binom{2h}{h} = \max_k \binom{2h}{k} \geqslant \binom{2h}{k}.$$

Inegalitatea este demonstrată în acest caz, deoarece $\binom{3h-k}{h-k} \geqslant 1$.

b) $k > h$. În acest caz produsele a cîte doi factori devin simultan minime pentru $x = k - h$, $y = h$ (sau $x = h$ și $y = k - h$), cînd vom arăta că

$$\binom{4h-k}{2h} \geqslant \binom{2h}{k}.$$

Trecînd la combinările complementare, trebuie să arătăm că

$$\binom{4h-k}{2h-k} \geqslant \binom{2h}{2h-k}.$$

Dar $4h - k \geqslant 2h$ sau $k \leqslant 2h$ și inegalitatea este demonstrată și în acest caz, ținînd seama de proprietatea de monotonie a numerelor binomiale. Din demonstrație mai rezultă că singurul caz cînd avem egalitate se realizează cînd $k = 2h$, adică pentru $x = y = h$.

1.28. Fie X o mulțime cu nk elemente și

$$X = A_1 \cup \ldots \cup A_k$$

o partiție a mulțimii X cu proprietatea că mulțimile $A_1, \ldots, A_k$ conțin fiecare cîte n elemente.

Numărul submulțimilor cu p elemente ale mulțimii X este egal cu $\binom{nk}{p}$.

Vom arăta că și membrul stîng al egalității de demonstrat reprezintă de asemenea numărul submulțimilor cu p elemente ale lui X. Fie $Y \subset X$ o submulțime cu p elemente a lui X. Vom considera mulțimile $Y \cap A_1$, $Y \cap A_2, \ldots, Y \cap A_k$. Avem $0 \leqslant |Y \cap A_i| \leqslant n$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$. Să notăm cu α_i numărul de numere egale cu i din șirul: $|Y \cap A_1|, |Y \cap A_2|, \ldots, |Y \cap A_k|$. Obținem:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = |Y| = p.$$

Dacă numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ sînt fixate, putem alege cîte 1 element în α_1 mulțimi dintre $A_1, \ldots, A_k$ în $\binom{n}{1}^{\alpha_1}$ moduri, ..., putem alege cîte n elemente din α_n mulțimi cu cîte n elemente în $\binom{n}{n}^{\alpha_n}$ moduri. Reuniunea acestor elemente ne dă mulțimea Y.

Pe de altă parte, putem selecta α_1 mulțimi dintre $A_1, \ldots, A_k$, α_2 mulțimi dintre cele rămase ș.a.m.d., în:

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{k-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} =$$

$$= \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \cdot \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{(k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1})!}{\alpha_n!(k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n))!} =$$

$$= \frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!(k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n))!}$$

moduri distincte.

Deci numărul de submulțimi ale lui X cu p elemente se obține și ca sumă a numerelor

$$\frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!(k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n))!}\binom{n}{1}^{\alpha_1}\ldots\binom{n}{n}^{\alpha_n},$$

după toate scrierile lui $p = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$ cu α_i numere întregi, $\alpha_i \geqslant 0$. Dacă $\alpha_1 = p$ și $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ trebuie să avem $k \geqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ sau $k \geqslant p$. Pentru $p = k - 1$ se obține o identitate găsită de I.M. Voloșin (J. Combinatorial Theory, A12(1972), 202—216).

1.29. Vom demonstra egalitatea (1) prin inducție după n.
Pentru $n = 1$ obținem în ambii membri $x + y + 1$.
Derivînd în raport cu y deducem.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y + n)^n = n(x + y + n)^{n-1} = n(x + (y + 1) + (n - 1))^{n-1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}(y + n - k)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}(n - k)(y + n - k)^{n-k-1} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x(x + k)^{k-1}((y + 1) + (n - 1) - k)^{(n-1)-k}.$$

Conform ipotezei de inducție, cei doi membri drepți ai egalităților scrise sînt egali.
Pentru a demonstra prima identitate a lui Abel este deci suficient să arătăm că 1) are loc pentru o valoare particulară oarecare a lui y, astfel încît $(y + n - k)^{n-k}$ să aibă sens pentru $k = n$, deci $y \neq k - n$. Să alegem $y = -x - n$. Membrul drept se anulează, iar membrul stîng este egal cu

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}(-x - k)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(x + k)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}k^j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-j}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^j\binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-j}\,n!\,S(j, n) = 0,$$ deoarece numerele lui Stirling de speța a II-a, $S(j, n) = 0$ pentru $j = 0, \ldots, n - 1$.

2) Partea stîngă a identității (1) poate fi scrisă astfel:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}(y + n - k)^{n-k-1}(y + n - k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}y(y + n - k)^{n-k-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x + k)^{k-1}(y + n - k)^{n-k-1}(n - k).$$

Aplicînd din nou (1), al doilea termen al acestei sume este egal cu

$$\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x(x + k)^{k-1}((y + 1) + (n - 1) - k)^{(n-1)-k} =$$

$$= n(x + (y + 1) + (n - 1))^{n-1} = n(x + y + n)^{n-1}.$$

Deci:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x+k)^{k-1}y(y+n-k)^{n-k-1}=(x+y+n)^n-n(x+y+n)^{n-1}=$$

$=(x+y)(x+y+n)^{n-1}$, de unde rezultă 2) prin împărțirea cu xy în ambii membri.

3) Dacă scădem $\frac{1}{x}(y+n)^{n-1}+\frac{1}{y}(x+n)^{n-1}$ din ambii membri ai identității 2) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1}=\frac{1}{x}\left((x+y+n)^{n-1}-(y+n)^{n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{y}\left((x+y+n)^{n-1}-(x+n)^{n-1}\right).$$

Trecînd la limită în ambii membri pentru $x\to 0$ și $y\to 0$ obținem 3).

1.30. Se face $y=0$ în prima identitate a lui Abel și se egalează coeficienții lui x din cei doi membri.

1.31. Dacă $f_1(n)$ și $f_2(n)$ sînt soluții ale relației de recurență:

$$f(n+2)=af(n+1)+bf(n), \tag{1}$$

să arătăm că pentru orice numere reale C_1 și C_2 funcția $h(n)=C_1f_1(n)+C_2f_2(n)$ este de asemenea o soluție a ecuației (1). Într-adevăr, ținînd seama că $f_1(n)$ și $f_2(n)$ verifică (1) obținem: $C_1f_1(n+2)+C_2f_2(n+2)=C_1(af_1(n+1)+bf_1(n))+C_2(af_2(n+1)+bf_2(n))=a(C_1f_1(n+1)+C_2f_2(n+1))+b(C_1f_1(n)+C_2f_2(n))$, sau: $h(n+2)=ah(n+1)+bh(n)$,
adică $h(n)$ verifică recurența (1).
Să arătăm acum că dacă r_1 este o rădăcină a ecuației de gradul al doilea:

$$r^2=ar+b, \tag{2}$$

atunci șirul $1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^n, \ldots$ este o soluție a ecuației (1). Într-adevăr, dacă $f(n)=r_1^n$ găsim $f(n+1)=r_1^{n+1}$ și $f(n+2)=r_1^{n+2}$. Substituind aceste valori în (1) găsim:

$$r_1^{n+2}=ar_1^{n+1}+br_1^n,$$

egalitate adevărată, deoarece prin simplificare cu r_1^n obținem $r_1^2=ar_1+b$. Fiindcă am presupus că $b\neq 0$ găsim $r_1\neq 0$.

Dacă ecuația caracteristică (2) are două rădăcini distincte $r_1\neq r_2$, rezultă că $f_1(n)=r_1^n$ și $f_2(n)=r_2^n$ sînt soluții ale ecuației (1).

Am văzut însă că pentru orice numere reale C_1 și C_2 funcția $f(n)=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ este o soluție a recurenței (1). Să arătăm că orice soluție a recurenței (1) are această formă. Pentru aceasta, să observăm că orice soluție a unei relații de recurență de forma (1) este unic determinată de valorile inițiale $f(0)$ și $f(1)$. Este deci suficient să arătăm că sistemul de ecuații:

$$C_1+C_2=f(0)$$
$$C_1r_1+C_2r_2=f(1)$$

are o soluție pentru orice $f(0)=b_0$ și $f(1)=b_1$.
Rezolvînd sistemul în ipoteza $r_1\neq r_2$ găsim:

$$C_1=\frac{f(1)-r_2f(0)}{r_1-r_2},\quad C_2=\frac{r_1f(0)-f(1)}{r_1-r_2},$$

deci cazul a) este rezolvat.

Dacă însă $r_1 = r_2$, din sistemul de ecuații obținem $C_1 + C_2 = f(0)$ și $C_1 + C_2 = \frac{f(1)}{r_1}$, sistem care în general este incompatibil.

Să arătăm că în acest caz pe lîngă soluția $f_1(n) = r_1^n$ mai există și soluția $f_2(n) = nr_1^n$ pentru recurența (1).

Într-adevăr, dacă ecuația de gradul al II-lea

$$r^2 = ar + b$$

are o rădăcină dublă, rezultă din relațiile lui Viète că $a = 2r_1$, $b = -r_1^2$, deci ecuația (2) se mai scrie:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2 \tag{3}$$

și recurența (1) are forma:

$$f(n + 2) = 2r_1 f(n + 1) - r_1^2 f(n). \tag{4}$$

Să verificăm că $f_2(n) = nr_1^n$ este o soluție a recurenței (4). Obținem:

$$f_2(n + 2) = (n + 2)r_1^{n+2} \text{ și } f_2(n + 1) = (n + 1)r_1^{n+1},$$

deci (4) devine:

$$(n + 2)r_1^{n+2} = 2(n + 1)r_1^{n+2} - nr_1^{n+2},$$

care este o identitate.

Deci $f_2(n) = nr_1^n$ este o soluție a recurenței (4).

Deducem că $f(n) = C_1 f_1(n) + C_2 f_2(n) = r_1^n(C_1 + C_2 n)$ este de asemenea o soluție a recurenței (4). Constantele C_1 și C_2 se pot alege astfel încît să fie verificate orice condiții inițiale pentru $n = 0$ și pentru $n = 1$. Într-adevăr, obținem sistemul:

$$C_1 = f(0)$$
$$r_1(C_1 + C_2) = f(1),$$

care are soluția $C_1 = f(0)$ și $C_2 = \frac{f(1) - r_1 f(0)}{r_1}$.

Deci soluția generală în cazul b) are forma cerută. În general, pentru o relație de recurență liniară cu coeficienți constanți de forma:

$$f(n + k) = a_1 f(n + k - 1) + \ldots + a_k f(n) \tag{5}$$

se formează ecuația caracteristică:

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Dacă rădăcinile acestei ecuații sînt $r_1, \ldots, r_s$ și ele au respectiv multiplicitățile $m_1, \ldots, m_s$, unde $m_1 + \ldots + m_s = k$, se poate arăta în mod asemănător că soluția generală a recurenței (5) are forma:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{s} (C_{i,1} + C_{i,2} n + \ldots + C_{i,m_i} n^{m_i - 1}) r_i^n.$$

Constantele $C_{i,1}, \ldots, C_{i,m_i}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant s$ se determină în mod unic punînd condiția ca soluția generală $f(n)$ să verifice condițiile inițiale $f(0) = b_0, \ldots, f(k - 1) = b_{k-1}$.

1.32. Să notăm cu a_n numărul de posibilități cerut de problemă. În prima zi există trei posibilități: elevul cumpără un covrig, deci mai există a_{n-1} posibilități de a cheltui cei $n - 1$ lei rămași; el cumpără o înghețată și deci

poate cheltui restul de bani în a_{n-2} moduri și mai rămîn de asemenea a_{n-2} moduri de a cheltui restul de bani dacă el cumpără o prăjitură.

Rezultă că

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

cu valorile inițiale $a_1 = 1$; $a_2 = 3$ (doi covrigi în 2 zile consecutive, o înghețată sau o prăjitură în prima zi).

Pentru a rezolva această recurență formăm ecuația caracteristică (problema 1.31):

$$r^2 - r - 2 = 0$$

cu soluțiile $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Soluția generală are forma:

$$a_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n,$$

unde C_1 și C_2 se determină din sistemul:

$$2C_1 - C_2 = 1$$
$$4C_1 + C_2 = 3,$$

care ne dă $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$. Deci obținem:

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n).$$

1.33. Dacă începem să acoperim dreptunghiul prin dominouri, începînd de la latura AD de lungime 3, se obțin posibilitățile din figura 1.1. În ultimele două cazuri, pătratul cu latura 1, rămas neacoperit din pătratul cu

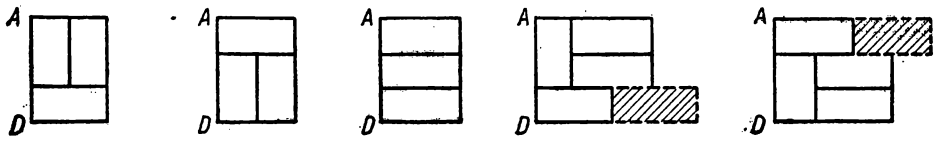


Fig. 1.1

latura 3 care are o latură AD, poate fi acoperit într-un singur mod prin dominoul haşurat, deci obținem:

$$U(2n + 2) = 3U(2n) + 2V(2n - 2), \qquad (1)$$

unde prin $V(2n)$ se notează numărul de moduri în care poate fi acoperit prin dominouri un dreptunghi $ABCD$, de laturi 3 și $2n$, la care se adaugă un dreptunghi de laturi 2 și 1, așezat cu latura mare peste latura AD a dreptunghiului.

Fig. 1.2

Din figura 1.2 rezultă că dominoul adițional poate fi acoperit în două moduri, de unde deducem relația:

$$V(2n) = U(2n) + V(2n - 2). \qquad (2)$$

Înlocuind în (1) pe $V(2n-2)$ dat de (2), obținem:
$U(2n+2) = 3U(2n) + 2U(2n-2) + 2V(2n-4)$. Conform (1), $2V(2n-4) = U(2n) - 3U(2n-2)$, deci relația devine:
$U(2n+2) = 3U(2n) + 2U(2n-2) + U(2n) - 3U(2n-2)$, adică obținem recurența liniară:

$$U(2n+2) = 4U(2n) - U(2n-2). \tag{3}$$

Prin simplă enumerare deducem $U(2) = 3$ și $U(4) = 11$. Ecuația caracteristică a recurenței (3) este $r^2 - 4r + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, deci soluția recurenței (3) este:

$$U(2n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

Constantele C_1 și C_2 se determină ținînd seama de valorile $U(2)$ și $U(4)$:

$$U(2n) = C_1(2+\sqrt{3})^n + C_2(2-\sqrt{3})^n,$$

unde

$$C_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \text{ și } C_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}.$$

(I. Tomescu, E 2417, The American Mathematical Monthly, 5(80), 1973, 559—560).

1.34. Să observăm că dacă avem un cuvînt de lungime $n-1$ format cu litere din alfabetul A, astfel încît literele a și b să nu fie litere vecine, putem forma un cuvînt de lungime n care verifică aceleași condiții, punînd în fața cuvîntului:

1) litera c sau litera d sau litera b, dacă cuvîntul începe cu litera a;

2) litera c sau d sau a dacă cuvîntul începe cu b;

3) oricare din cele patru litere a, b, c, d dacă cuvîntul începe cu c sau cu d.

Deoarece orice cuvînt de lungime n care verifică condițiile problemei se obține dintr-un cuvînt de lungime $n-1$ prin aceste operații, dacă notăm cu x_n numărul cuvintelor de lungime n care încep cu a sau cu b și cu y_n numărul cuvintelor cu prima literă c sau d și care verifică condițiile impuse, obținem următoarele relații de recurență:

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$$
$$y_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1}.$$

Prin adunarea egalităților membru cu membru obținem:

$$x_n + y_n = 3(x_{n-1} + y_{n-1}) + y_{n-1} = 3(x_{n-1} + y_{n-1}) + 2(x_{n-2} + y_{n-2}).$$

Trebuie să calculăm suma $z_n = x_n + y_n$, care verifică deci recurența:

$$z_n = 3z_{n-1} + 2z_{n-2}.$$

Obținem $z_1 = 4$ și $z_2 = 14$, deoarece cuvintele de lungime 2 care verifică condițiile impuse sînt toate cele $4^2 = 16$ cuvinte de lungime 2 din care se suprimă cuvintele ab și ba.

Pentru a rezolva această recurență folosim metoda generală dată de problema 1.31.

Ecuația caracteristică $r^2 - 3r - 2 = 0$ are rădăcinile $r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, deci vom căuta soluțiile sub forma:

$$z_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

unde constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$z_1 = 4 \text{ și } z_2 = 14.$$

Rezolvînd sistemul:

$$C_1 \frac{3 + \sqrt{17}}{2} + C_2 \frac{3 - \sqrt{17}}{2} = 4$$

$$C_1 \frac{13 + 3\sqrt{17}}{2} + C_2 \frac{13 - 3\sqrt{17}}{2} = 14$$

găsim

$$C_1 = \frac{\sqrt{17} + 5}{2\sqrt{17}} \text{ și } C_2 = \frac{\sqrt{17} - 5}{2\sqrt{17}}.$$

Deci soluția problemei se scrie sub forma:

$$z_n = \frac{\sqrt{17} + 5}{2\sqrt{17}} \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{17} - 5}{2\sqrt{17}} \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^n$$

1.35. Utilizînd relația de recurență pentru numerele binomiale și observația că $\binom{n-k}{k} = 0$ pentru $k > \left[\frac{n}{2}\right]$, deducem:

$$a_n = \sum_{k \geqslant 0} \left[\binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] z^k =$$

$$= \sum_{k \geqslant 0} \binom{n-1-k}{k} z^k + z \sum_{k \geqslant 1} \binom{(n-2)-(k-1)}{k-1} z^{k-1}.$$

Deci am obținut recurența:

$$a_n = a_{n-1} + z a_{n-2} \tag{1}$$

cu valorile inițiale $a_0 = a_1 = 1$.
Ecuația caracteristică a acestei recurențe este:

$$r^2 - r - z = 0$$

cu soluțiile $r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z}}{2}$ și $r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4z}}{2}$.

Dacă $z \neq -\frac{1}{4}$, soluția generală a recurenței (1) este

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \tag{2}$$

unde C_1 și C_2 se determină din sistemul:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 \frac{1 + \sqrt{1 + 4z}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{1 + 4z}}{2} = 1.$$

Găsim $C_1 = \frac{1+\sqrt{1+4z}}{2\sqrt{1+4z}}$ și $C_2 = \frac{\sqrt{1+4z}-1}{2\sqrt{1+4z}}$, deci din (2) deducem:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Dacă $z = -\frac{1}{4}$ obținem $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ și conform problemei 1.31, soluția generală a recurenței (1) este:

$$a_n = r_1^n(C_1 + C_2 n), \tag{3}$$

unde $C_1 = a_0 = 1$ și $C_2 = \frac{a_1 - r_1 a_0}{r_1} = 1$.

Făcînd aceste înlocuiri, împreună cu $r_1 = \frac{1}{2}$ în (3), deducem:

$$a_n = \frac{n+1}{2^n} \text{ pentru } z = -\frac{1}{4}.$$

1.36. Fie $S(n, k; x_1, \ldots, x_k) = (x_1 + \ldots + x_k)^n - \sum (x_1 + \ldots + x_{k-1})^n + \sum (x_1 + \ldots + x_{k-2})^n - \ldots$, deci suma căutată $S_n(x_1, \ldots, x_n) = a_0 S(n, n; x_1, \ldots, x_n) + a_1 S(n-1, n; x_1, \ldots, x_n) + a_2 S(n-2, n; x_1, \ldots, x_n) + \ldots + a_n S(0, n; x_1, \ldots, x_n)$.

Deoarece $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, găsim expresia funcției generatoare exponențiale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n, k; x_1, \ldots, x_k)\frac{z^n}{n!} = e^{(x_1+\ldots+x_k)z} -$$

$$-\sum e^{(x_1+\ldots+x_{k-1})z} + \sum e^{(x_1+\ldots+x_{k-2})z} - \ldots =$$

$$= (e^{x_1 z} - 1)(e^{x_2 z} - 1)\ldots(e^{x_k z} - 1) = \left(\frac{x_1 z}{1!} + \frac{(x_1 z)^2}{2!} + \ldots\right)\left(\frac{x_2 z}{1!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_2 z)^2}{2!} + \ldots\right)\ldots\left(\frac{x_k z}{1!} + \frac{(x_k z)^2}{2!} + \ldots\right).$$

Egalînd coeficienții lui z^n în cei doi membri pentru $n = 1, \ldots, k$, găsim $S(n, k; x_1, \ldots, x_k) = 0$ pentru $0 \leqslant n < k$ și $S(n, n; x_1, \ldots, x_n) = n!\, x_1 \ldots x_n$. Deci $S_n(x_1, \ldots, x_n) = a_0 S(n, n; x_1, \ldots, x_n) = a_0 n!\, x_1 \ldots x_n$.
(L. Carlitz, Fibonacci Quarterly, 18,1(1980), 85).

1.37. Să notăm:

$$p_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

polinomul obținut din p prin înlocuirea variabilei x_i cu 0. Vom arăta că valoarea polinomului $z^k p$ pentru $x_i = 0$ este egală cu:

$$z^k p\,|_{x_i=0} = z^{k-1} p_i + z^k p_i \tag{1}$$

pentru $k \geqslant 1$, unde $z^0 p_i = p_i$ prin definiție.

Într-adevăr, cele $\binom{n}{k}$ combinări ale celor n variabile luate cîte k se pot scrie ca reuniunea dintre cele $\binom{n-1}{k-1}$ combinări ale celor n variabile luate

cîte k și care îl conțin pe x_i și cele $\binom{n-1}{k}$ combinări ale celor n variabile luate cîte k și care nu îl conțin pe x_i. Deci putem scrie:

$$z^k p = z_1^k p + z_2^k p, \tag{2}$$

unde $z_1^k p$ este suma tuturor polinoamelor care se obțin din p prin înlocuirea a k dintre variabilele $x_1, \ldots, x_n$ cu zero, printre care și x_i și $z_2^k p$ este suma tuturor polinoamelor care se obțin din p prin înlocuirea a k dintre variabilele $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ cu zero, în toate modurile posibile.

Din (2) rezultă că:

$z^k p|_{x_i=0} = z_1^k p|_{x_i=0} + z_2^k p|_{x_i=0} = z_1^k p + z_2^k p_i = z^{k-1} p_i + z^k p_i$, adică (1).

Deci $(p - z^1 p + z^2 p - \ldots)|_{x_i=0} = p_i - (p_i + z^1 p_i) + (z^1 p_i + z^2 p_i) - (z^2 p_i + z^3 p_i) + \ldots + (-1)^{n-1} z^{n-2} p_i = 0$, deoarece $z^{n-1} p_i = z^n p_i = \ldots = 0$.

Deducem că monomul $x_1 x_2 \ldots x_n$ divide polinomul $p - z^1 p + \ldots$, deoarece acesta se anulează pentru $x_i = 0$ cu $1 \leqslant i \leqslant n$.

Deoarece $p - z^1 p + \ldots$ are gradul cel mult egal cu m, rezultă că

$$p - z^1 p + z^2 p - \ldots = \begin{cases} 0 \text{ pentru } m < n \\ c x_1 \ldots x_n \text{ pentru } m = n \end{cases}$$

Însă polinomul $z^k p$ cu $k \geqslant 1$ nu conține nici un termen de forma $x_1 \ldots x_n$, de unde deducem că c este coeficientul lui $x_1 \ldots x_n$ în expresia polinomului p.

Dacă $p(x, \ldots, x_n) = (x_1 + \ldots + x_n)^k$, obținem coeficientul lui $x_1 \ldots x_n$ pentru $n = k$, egal cu $c = \frac{n!}{(1!)^n} = n!$ din formula multinomului (problema 1.16).

Pe de altă parte, valoarea numerică a polinomului $p - z^1 p + \ldots$ pentru $x_1 = \ldots = x_n = 1$ este egală cu

$$\sum_{n-i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} i^k = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k.$$

Conform rezultatului dedus anterior obținem că această expresie este egală cu 0 pentru $0 \leqslant k < n$ și este egală cu $c = n!$ pentru $k = n$, de unde rezultă identitatea lui Euler.

1.38. Considerînd membrul drept al identității un polinom în n, găsim termenul liber egal cu $-\binom{p}{1}(-1)^p + \binom{p}{2}(-2)^p - \ldots + (-1)^p \binom{p}{p}(-p)^p = p^p - \binom{p}{1}(p-1)^p + \binom{p}{2}(p-2)^p - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} = p!$, ținînd seama de formula lui Euler (problema 1.37).

În mod analog coeficientul lui n^p este egal cu $1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \ldots + (-1)^p \binom{p}{p} = 0$, iar coeficientul lui n^k pentru $1 \leqslant k \leqslant p-1$ este egal cu: $(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\left[-\binom{p}{1} + \binom{p}{2} 2^{p-k} - \binom{p}{3} 3^{p-k} + \ldots + (-1)^n p^{p-k}\right]$.

Notînd $p - k = m$, obținem $1 \leqslant m \leqslant p - 1$ și deci coeficientul lui n^k este egal și cu

$$(-1)^k \binom{p}{m}\left[p^m - \binom{p}{1}(p-1)^m + \binom{p}{2}(p-2)^m - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}\right] =$$

$$= (-1)^k \binom{p}{m} s_{m,p} = 0, \text{ deoarece } m < p.$$

2. PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI AL EXCLUDERII ȘI FORMULE DE INVERSIUNE

2.1. Să scădem din numărul total de 40 de elevi numărul elevilor care preferă matematica, fizica, respectiv chimia:

$$40 - 14 - 16 - 11.$$

În acest mod elevii care preferă și matematica și fizica sînt scăzuți de două ori, deci ei mai trebuie adunați o dată.

Procedînd analog pentru celelalte două perechi de materii găsim numărul:

$$40 - 14 - 16 - 11 + 7 + 8 + 5$$

Elevii care preferă toate cele trei materii au fost scăzuți de 3 ori și apoi au fost adunați de 3 ori. Pentru a obține numărul elevilor care nu au preferințe pentru oricare dintre cele trei materii mai trebuie deci să scădem o dată cei 4 elevi care au preferință pentru toate cele trei materii. Obținem rezultatul final:

$$40 - 14 - 16 - 11 + 7 + 8 + 5 - 4 = 15.$$

2.2. Demonstrația se face prin inducție după $q \geqslant 2$. Pentru $q = 2$ formula scrisă devine:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

care este adevărată.

Presupunînd formula adevărată pentru orice reuniune a cel mult $q - 1$ mulțimi, deducem:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_q| = |A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}| + |A_q| - |(A_1 \cup \quad \cup A_{q-1}) \cap A_q|.$$

Aplicînd proprietatea de distributivitate a intersecției față de reuniune, găsim:

$$(A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}) \cap A_q = (A_1 \cap A_q) \cup (A_2 \cap A_q) \cup \ldots \cup (A_{q-1} \cap A_q),$$

deci aplicînd ipoteza de inducție se obține:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_q| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cap A_j| + \ldots (-1)^q \left|\bigcap_{i=1}^{q-1} A_i\right| +$$

$$+ |A_q| - \sum_{1 \leqslant i < q} |A_i \cap A_q| + \ldots + (-1)^{q+1}\left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right|,$$

ținînd seama de idempotența intersecției, sub forma $(A_i \cap A_q) \cap (A_j \cap A_q) = A_i \cap A_j \cap A_q$; $\ldots$; $\bigcap_{i=1}^{q-1}(A_i \cap A_q) = \bigcap_{i=1}^{q} A_i$.

Regrupînd termenii, se obține chiar formula includerii și a excluderii pentru reuniunea a q mulțimi. Formula poartă denumirea de principiul includerii și al excluderii din cauza alternanței semnelor din membrul drept.

2.3. Să notăm cu A_i mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu n, care sînt multipli de p_i. Deducem:

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}; \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j},$$

deoarece numerele p_i și p_j fiind numere prime sînt prime între ele etc.

Numerele naturale mai mici sau egale cu n și care sînt prime cu n sînt numerele din mulțimea $X = \{1, \ldots, n\}$ care nu aparțin nici uneia dintre mulțimile A_i pentru $1 \leqslant i \leqslant q$. Deci $\varphi(n) = n - |A_1 \cup \ldots \cup A_q| = n -$

$$- \sum_{i=1}^{q} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^q \left| \bigcap_{i=1}^{q} A_i \right| =$$

$$= n - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} \frac{n}{p_i p_j} - \ldots + (-1)^q \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_q} =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_q}\right).$$

2.4. Să notăm cu A_i mulțimea celor $(n-1)!$ permutări care admit un punct fix în i și să aplicăm principiul includerii și al excluderii pentru a găsi numărul permutărilor care admit cel puțin un punct fix. Acest număr este egal cu:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Dar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$, deoarece o permutare din mulțimea $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ prezintă puncte fixe în pozițiile $i_1, i_2, \ldots, i_k$, celelalte poziții conținînd o permutare a celor $n-k$ elemente rămase, al căror număr este $(n-k)!$. Dar k poziții $i_1, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulțimea celor n poziții în $\binom{n}{k}$ moduri, deci

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}.$$

$$D(n) = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

de unde se obține expresia anunțată a lui $D(n)$.

Rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{e}$, deci pentru n mare probabilitatea ca o permutare a n elemente aleasă aleator să nu aibă puncte fixe este apropiată de $\frac{1}{3}$.

Deoarece cele p puncte fixe $(0 \leqslant p \leqslant n)$ pot fi alese în $\binom{n}{p}$ moduri și celelalte $n-p$ puncte nu mai sînt fixe, rezultă că numărul permutărilor

din S_n cu p puncte fixe este egal cu $\binom{n}{p} D(n-p)$, deoarece pentru fiecare alegere a celor p puncte fixe există $D(n-p)$ permutări ale obiectelor rămase, fără puncte fixe, dacă se definește $D(0) = 1$.

2.5. Conform problemei 2.4., $D(n)$ are expresia: $D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$. Pentru a obține expresia lui $E(n)$, vom nota cu A_i mulțimea permutărilor pare $p \in S_n$ astfel încît $p(i) = i$. Deoarece în S_n există $\frac{1}{2} n!$ permutări pare, rezultă că

$$E(n) = \frac{1}{2} n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \frac{1}{2} n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Deoarece $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{1}{2}(n-k)!$, rezultă în mod analog ca pentru $D(n)$, că

$$E(n) = \frac{1}{2} n! - \binom{n}{1} \frac{1}{2}(n-1)! + \binom{n}{2} \frac{1}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} +$$

$$+ (-1)^n = \frac{1}{2}\left(D(n) + (-1)^{n-1}(n-1)\right).$$

2.6. Dacă $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_q^{i_q}$, unde $p_1, \ldots, p_q$ sînt numere prime distincte două cîte două, vom demonstra proprietatea prin inducție după $i_1 + i_2 + \ldots + i_q$.
Dacă $i_1 = 1$ și $i_2 = \ldots = i_q = 0$, atunci n este număr prim și suma din membrul stîng al egalității devine $\varphi(1) + \varphi(n) = 1 + n - 1 = n$, deci egalitatea este verificată dacă se definește $\varphi(1) = 1$.
Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate numerele pentru care $i_1 + \ldots + i_q \leqslant r - 1$ și fie n un număr natural cu $i_1 + \ldots + i_q = r$.
Vom nota

$$D_1 = \left\{p_1^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_q^{j_q} \mid 0 \leqslant j_1 \leqslant i_1 - 1;\ 0 \leqslant j_2 \leqslant i_2, \ldots, 0 \leqslant j_q \leqslant i_q\right\};$$

$$D_2 = \left\{p_1^{i_1} p_2^{j_2} \ldots p_q^{j_q} \mid 0 \leqslant j_2 \leqslant i_2, \ldots, 0 \leqslant j_q \leqslant i_q\right\}.$$

Obținem că $D_1 \cup D_2$ reprezintă o partiție a mulțimii D a divizorilor numărului n. Deci, utilizînd ipoteza de inducție, putem scrie:

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = \sum_{d \in D_1} \varphi(d) + \sum_{d \in D_2} \varphi(d) = \frac{n}{p_1} + p_1^{i_1} \frac{n}{p_1^{i_1}}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) = n,$$ deoarece dacă a și b sînt prime între ele atunci $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$. Proprietatea este deci demonstrată prin inducție (Gauss).

2.7. Să presupunem că o matrice pătrată de ordinul trei verifică condițiile impuse. Adunînd cîte o unitate tuturor elementelor ei se obține matricea:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

unde $a_1 + b_1 + c_1 = r + s$, $a_2 + b_2 + c_2 = r + s$ etc.

Conform problemei 1.19, $r + 3$ poate fi scris ca o sumă de trei numere pozitive în $\binom{r+2}{2}$ moduri. Deci completînd primele două linii ale matricei în toate modurile posibile obținem $\binom{r+2}{2}^2$ matrice. Elementele din linia a III-a se determină acum din condiția ca suma elementelor pe fiecare coloană să fie $r + 3$. Trebuie eliminate însă cazurile nefavorabile, cînd pe a III-a linie obținem elemente negative sau nule. Se observă că există relația:

$$b_1 + c_1 + b_2 + c_2 = r + 3 + a_3. \tag{1}$$

Dacă $a_3 \leqslant 0$, valoarea minimă pentru a_3 este $r + 3 - 2(r + 1) = 1 - r$, deci ținînd seama de (1), rezultă că suma a oricare două dintre numerele b_1, c_1, b_2, c_2 este mai mică ca $r + 3$, deci matricea va fi completată în mod corect pe linia a III-a, în afara elementului a_3, cu elemente mai mari ca zero. Deci un singur număr de pe linia a III-a poate fi mai mic sau egal cu zero. Fie $a_3 \leqslant 0$. În acest caz putem genera toate matricele de forma indicată cu suma elementelor pe linii și pe coloane egală cu $r + 3$, pentru care singurul element nepozitiv este a_3, scriind numărul $r + 3 + a_3$ sub forma unei sume de 4 numere pozitive. Ținînd seama iarăși de problema 1.19, rezultă că pentru $a_3 = 0, -1, \ldots, -r + 1$, se obține un număr de soluții ale ecuației (1) egal cu

$$\binom{r+2}{3} + \binom{r+1}{3} + \ldots + \binom{3}{3} = \binom{r+3}{4} - \binom{r+2}{4} + \binom{r+2}{4} - \binom{r+1}{4} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{5}{4} - \binom{4}{4} + \binom{3}{3} = \binom{r+3}{4}.$$

Deci dacă unul dintre a_3, b_3, c_3 este negativ sau nul (nu pot fi doi în această situație), numărul de matrice care nu verifică condiția impusă este $\binom{r+3}{4}$. Deci numărul căutat de matrice este egal cu $\binom{r+2}{2}^2 - 3\binom{r+3}{4}$.

Aceste matrice se mai numesc și *pătrate magice*, impunîndu-se uneori și condiția ca suma elementelor de pe diagonale să fie egală tot cu r.

(P.A. MacMahon, Combinatory analysis, II, Cambridge University Press, Cambridge, 1916).

2.8. Deoarece $\frac{D(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$, găsim că această expresie este coeficientul lui t^n din dezvoltarea

$$\frac{e^{-t}}{1-t} = \left(1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \ldots\right)(1 + t + t^2 + \ldots).$$

Cele două relații de recurență se deduc printr-un calcul imediat.

2.9. Fie $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ și pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$ să notăm prin A_i mulțimea funcțiilor de la X în Y pentru care y_i nu este imaginea nici unui element din X, adică:

$$A_i = \{f : X \to Y \mid y_i \notin f(X)\}.$$

Obținem $s_{n,m} = m^n - |A_1 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m|$, deoarece numărul total de funcții de la X în Y este egal cu m^n. Aplicînd principiul includerii și al excluderii se deduce:

$$s_{n,m} = m^n - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^m \left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|.$$

Dar A_i este mulțimea funcțiilor definite pe X, cu valori în $Y \setminus \{y_i\}$, deci $|A_i| = (m-1)^n$; $A_i \cap A_j$ este mulțimea funcțiilor definite pe X, cu valori în $Y \setminus \{y_i, y_j\}$ și deci $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$ și în general:

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$, unde $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m$.

Deoarece există $\binom{m}{k}$ submulțimi de indici $K \subset \{1, \ldots, m\}$ cu $|K| = k$, rezultă că fiecare sumă

$$\sum_{\substack{K \subset \{1, \ldots, m\} \\ |K| = k}} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

conține $\binom{m}{k}$ termeni, egali fiecare cu $(m-k)^n$.

Deci $s_{n,m} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}$.

Pentru $m = n$, $s_{n,m}$ reprezintă numărul bijecțiilor $f: X \to Y$ cu $|X| = |Y| = n$, deci $s_{n,n} = n!$ sau $n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1} n$.

Dacă $n < m$ nu există surjecții de la X pe Y, deci $s_{n,m} = 0$.

2.10. Dacă $Z = \{y_1, \ldots, y_r\}$, cu aceleași notații ca la problema precedentă, obținem:

$$s_{n,m,r} = m^n - |A_1 \cup \ldots \cup A_r| = m^n - \binom{r}{1}(m-1)^n + \binom{r}{2}(m-2)^n - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r (m-r)^n.$$

Pentru $r = m$ se deduce $s_{n,m,m} = s_{n,m}$ deoarece $Z = Y$.

2.11. Numărul tuturor cuvintelor care folosesc toate cele $2n$ litere din alfabetul A este egal cu:

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n},$$

deoarece literele identice pot fi permutate între ele în $(2!)^n = 2^n$ moduri distincte, rezultînd un același cuvînt format cu cele $2n$ litere din A.

Să notăm cu A_i mulțimea cuvintelor formate cu cele $2n$ litere din A pentru care cele două litere a_i sînt vecine. Rezultă că numărul căutat este egal cu

$$\frac{(2n)!}{2^n} - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|. \tag{1}$$

Pentru a evalua $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ aplicăm principiul includerii și al excluderii (problema 2.2.):

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots$$
$$(-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|. \tag{2}$$

Să calculăm în cazul general numărul de elemente din $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ și să arătăm că acest număr nu depinde de alegerea indicilor $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Dacă un cuvînt aparține acestei mulțimi înseamnă că el apar-

ține fiecăreia din mulțimile A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}, deci literele a_{i_1}, a_{i_1}; a_{i_2}, a_{i_2}; ...; a_{i_k}, a_{i_k} sînt vecine. Cuvintele pentru care cele k perechi de litere sînt vecine se obțin în modul următor:

Se formează toate cuvintele avînd $2n - k$ litere care formează un alfabet obținut din A prin suprimarea cîte unei litere dintre $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Apoi în fiecare cuvînt astfel format se dublează literele $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, adăugînd după litera a_{i_1} o altă literă egală cu a_{i_1}, ..., după a_{i_k} o nouă literă egală cu a_{i_k}.
Deci obținem:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{(2n-k)!}{(2!)^{n-k}} = \frac{2^k(2n-k)!}{2^n}. \tag{3}$$

Deoarece indicii $i_1, \ldots, i_k$ verificînd:
$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ pot fi aleși în $\binom{n}{k}$ moduri, rezultă numărul cuvintelor care nu conțin două litere identice vecine sub forma:
$\frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{2(2n-1)!}{2^n} + \binom{n}{2}\frac{2^2(2n-2)!}{2^n} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^n n!}{2^n}$, ținînd seama de (1), (2) și (3).

2.12. Orice graf orientat care nu conține circuite are cel puțin un vîrf x din care nu iese nici un arc, sau $d^+(x) = 0$ și cel puțin un vîrf y în care nu intră nici un arc, adică $d^-(y) = 0$.
Să notăm cu A_i mulțimea grafurilor orientate, cu n vîrfuri etichetate cu numerele din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$, fără circuite, care au proprietatea că $d^+(i) = 0$. Obținem deci:

$$a_n = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Dar

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_k)} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} a_{n-k},$$

deoarece numărul subgrafurilor cu $n - k$ vîrfuri din mulțimea $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, fără circuite, este egal cu a_{n-k} și vîrfurile $i_1, \ldots, i_k$ au proprietatea $d^+(i_1) = \ldots = d^+(i_k) = 0$, deci ele pot fi unite prin arce avînd o orientare unic determinată cu celelalte $n - k$ vîrfuri în $(2^{n-k})^k = 2^{k(n-k)}$ moduri.
Deci fiecare termen din suma scrisă este egal cu $2^{k(n-k)}a_{n-k}$, suma conținînd $\binom{n}{k}$ astfel de termeni, de unde rezultă relația de recurență pentru numerele a_n.
Calculînd cu formula dată se obține $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 25$, valori care se regăsesc prin enumerarea directă.
(R.W. Robinson, New directions in the theory of graphs, Academic Press, New York — London, (1973), 239—273).

2.13. Dacă notăm prin $A_\sigma(n; 1^m)$ numărul schemelor de aranjare a n obiecte identice în m celule distincte două cîte două, vom arăta că $A_\sigma(n; 1^m) = \binom{n+m-1}{n}$. Într-adevăr, admițînd existența celulelor vide, acest număr

reprezintă numărul de moduri în care poate fi scris n ca o sumă de m numere întregi și nenegative:

$n = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$; $u_i \geqslant 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant m$, două sume fiind distincte dacă ele diferă ca mulțimi de termeni sau prin ordinea termenilor.

Conform problemei 1.19, acest număr este tocmai $\binom{n+m-1}{n}$.

Pentru a obține expresia din enunț, vom aranja mai întîi cele λ_1 grupe de cîte un obiect, apoi cele λ_2 grupe de cîte 2 obiecte identice etc., obținînd:

$$A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\,2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m) = A_{\varnothing}\,(1;\ 1^m)^{\lambda_1}\,A_{\varnothing}\,(2;\ 1^m)^{\lambda_2}\ldots A_{\varnothing}\,(n;\ 1^m)^{\lambda_n} =$$

$$= \binom{m}{1}^{\lambda_1}\binom{m+1}{2}^{\lambda_2}\ldots\binom{m+n-1}{n}^{\lambda_n}.$$

Pentru a obține expresia numărului de scheme de aranjare care nu lasă celule vide, vom aplica principiul includerii și al excluderii, notînd cu S_i mulțimea schemelor de aranjare care lasă celula i vidă:

$$A(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m) = A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m) - \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}|S_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|S_i \cap S_j| - \ldots + (-1)^m\left|\bigcap_{i=1}^{m} S_i\right| =$$

$$= A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m) - \binom{m}{1}A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^{m-1}) +$$

$$+\binom{m}{2}A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^{m-2}) - \ldots,$$ adică expresia căutată, deoarece

$$\bigcap_{i=1}^{m} S_i = \varnothing \text{ și } \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

(P.A. MacMahon, Combinatory Analysis, I, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1915)).

2.14. Numărul căutat este tocmai $A(1^{\lambda_1}\,2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m)$. De exemplu, numărul $150 = 2\cdot 3\cdot 5^2$ admite $A(1^2 2^1;\ 1^3) = \binom{3}{1}\binom{1}{1}^2\binom{2}{2} - \binom{3}{2}\binom{2}{1}^2\binom{3}{2} +$

$+\binom{3}{3}\binom{3}{1}^2\binom{4}{2} = 21$ descompuneri ca un produs de trei numere naturale. Dacă se admite și existența factorilor egali cu unitatea, se obțin $A_{\varnothing}\,(1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n};\ 1^m)$ astfel de produse de m factori egale cu q.

2.15. Vom arăta că numărul $M(p, q)$ reprezintă numărul acoperirilor prin muchii ale mulțimii vîrfurilor grafului bipartit complet $K_{p,q}$. Să presupunem că bipartiția care generează graful $K_{p,q}$ este $X \cup Y$, unde $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ și $Y = \{y_1, \ldots, y_q\}$.

Vom nota prin A_p familia mulțimilor de muchii ale grafului care acoperă vîrfurile din X și prin A_p^i familia mulțimilor de muchii care acoperă vîrfurile din X și nu acoperă vîrful y_i, pentru $i = 1, \ldots, q$.

Fiecare vîrf din X poate fi acoperit prin muchii în $2^q - 1$ moduri, deoarece extremitățile acestor muchii din mulțimea Y formează o submulțime nevidă a lui Y. Rezultă că:

$$|A_p| = (2^q - 1)^p.$$

Obținem $M(p, q) = |A_p| - \left|\bigcup_{i=1}^{q} A_p^i\right|$. Aplicînd principiul includerii și al excluderii, deducem:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{q} A_p^i\right| = \sum_{i=1}^{q} |A_p^i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_p^i \cap A_p^j| + \ldots$$

$$\ldots = \binom{q}{1}(2^{q-1} - 1)^p - \binom{q}{2}(2^{q-2} - 1)^p + \ldots + (-1)^q \binom{q}{1},$$

deci $M(p, q)$ are semnificația menționată. Deoarece grafurile $K_{p,q}$ și $K_{q,p}$ sînt izomorfe, rezultă că $M(p, q) = M(q, p)$.
(I. Tomescu, J. Combinatorial Theory, B28,2(1980), 127—141).

2.16. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ și $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ sînt două matrice compatibile, să presupunem că $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$. În acest caz măcar unul din termeni este nenul, de exemplu $a_{ij} \neq 0$ și deci $x_i \leqslant x_j$, pentru $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Rezultă că $A + B$ este o matrice compatibilă.

Fie $AB = C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ și fie $c_{ij} \neq 0$.

Deoarece

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj},$$

va exista un indice k astfel încît să avem $a_{ik} \neq 0$ și $b_{kj} \neq 0$. Deci conform definiției $x_i \leqslant x_k$ și $x_k \leqslant x_j$ și prin tranzitivitate obținem $x_i \leqslant x_j$, deci matricea C este compatibilă.

Fie A o matrice compatibilă de ordinul n inversabilă. Printr-o renumerotare a elementelor din V putem presupune că $x_i \leqslant x_j$ implică $i \leqslant j$. Deci A are o formă superior triunghiulară, ceea ce implică $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$.

Obținem $a_{ii} \neq 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

Fie $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = A^{-1}$ și să presupunem prin reducere la absurd că B nu este compatibilă, adică există un element x_i care nu este mai mic sau egal cu x_j și $b_{ij} \neq 0$. Să alegem un indice i maximal relativ la această proprietate, pentru indicele j fixat.

Deoarece x_i nu este mai mic sau egal cu x_j avem $i > j$, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = 0.$$

Dar $a_{ii} b_{ij} \neq 0$, ceea ce implică existența unui indice $k \neq i$ astfel încît $a_{ik} b_{kj} \neq 0$, sau $a_{ik} \neq 0$ și $b_{kj} \neq 0$. Deoarece A este compatibilă, rezultă $x_i \leqslant x_k$, deci $i < k$. Conform convenției de alegere a indicelui i, rezultă că $b_{kj} \neq 0$ implică $x_k \leqslant x_j$. Prin tranzitivitate obținem $x_i \leqslant x_j$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $B = A^{-1}$ este compatibilă.

2.17. Să definim matricea $Z = (z_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ astfel:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_i \leqslant x_j; \\ 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Condițiile impuse funcției μ se transcriu sub formă matriceală astfel:

$$MZ = I,$$

unde $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ și $m_{ij} = \mu(x_i, x_j)$, iar I este matricea unitate de ordinul n. Într-adevăr, putem scrie:

$$s_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} z_{ki} = m_{ii} z_{ii} + 0 = 1,$$

deoarece $m_{ii} = z_{ii} = 1$ și $m_{ik} \neq 0$ implică $x_i \leqslant x_k$, deci $z_{ki} = 0$ pentru $k \neq i$;

$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} z_{kj} = 0$ pentru x_i care nu este mai mic sau egal cu x_j deoarece $m_{ik} \neq 0$ și $z_{kj} \neq 0$ implică $x_i \leqslant x_k$ și $x_k \leqslant x_j$, deci $x_i \leqslant x_j$, ceea ce contrazice ipoteza;

Pentru $x_i < x_j$ obținem $s_{ij} = \sum_{x_i \leqslant x_k \leqslant x_j} m_{ik} = 0$, conform celei de a III-a condiții impuse funcției lui Moebius.

Deoarece $z_{ii} = 1$ pentru $i = 1, \ldots, n$, rezultă din soluția problemei precedente că matricea Z este inversabilă și de asemenea $M = Z^{-1}$ este o matrice compatibilă. Deci funcția căutată $\mu(x, y)$ este definită de matricea Z^{-1}.

Deoarece M este compatibilă cu relația de ordine parțială definită pe V, rezultă că $\mu(x, y) = 0$ dacă x nu este mai mic sau egal cu y. Din relațiile scrise, ținînd seama că $s_{ii} = 1$ și $s_{ij} = 0$ pentru orice $i \neq j$, se deduce că funcția μ definită de matricea Z^{-1} satisface și ultimele două condiții impuse funcției lui Moebius.

2.18. Să observăm că funcția μ poate fi obținută inductiv astfel: $\mu(a, a) = 1$ și dacă cunoaștem $\mu(a, y)$ pentru orice y cu $a \leqslant y < b$, din ecuația:

$$\sum_{a \leqslant y \leqslant b} \mu(a, y) = 0$$

obținem valoarea $\mu(a, b) = -\sum_{a \leqslant y < b} \mu(a, y)$.

Deci $\mu(a, x)$ poate fi calculată pentru orice x satisfăcînd $a \leqslant x \leqslant b$ folosind valorile calculate anterior pentru elemente situate între a și x.

a) Vom arăta că $\mu(X, Y) = (-1)^{|Y| - |X|}$ pentru orice $X \subset Y \subset S$, luînd prin definiție $\mu(X, Y) = 0$ dacă $X \not\subset Y$. Într-adevăr, funcția astfel definită satisface:

$$\sum_{A \subset Y \subset B} (-1)^{|Y| - |A|} = \sum_{k=0}^{|B| - |A|} \binom{|B| - |A|}{k} (-1)^k =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ pentru } A = B; \\ 0 \text{ pentru } B \supset A \text{ și } B \neq A. \end{cases}$$

b) Vom arăta că

$$\mu(x, y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right),$$

unde $\mu(x)$ este funcția lui Moebius din teoria numerelor, definită astfel:

Dacă descompunerea lui k în factori primi are forma: $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, cu $p_1, \ldots, p_r$ numere prime distincte două cîte două, atunci:

$$\mu(k) = \begin{cases} (-1)^r \text{ dacă } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 1, \\ 0 \qquad \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Obținem deci $\mu(a, a) = (-1)^0 = 1$. Dacă $a \neq b$ și $a \mid b$, deducem:

$$\sum_{a \mid y \mid b} \mu(a, y) = \sum_{a \mid y \mid b} \mu\left(\frac{y}{a}\right) = \sum_{d \mid \frac{b}{a}} \mu(d).$$

Să notăm $\frac{b}{a} = k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ și obținem:

$\sum_{d \mid k} \mu(d) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant r} \mu(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s})$, restul termenilor fiind nuli din definiția funcției $\mu(k)$. Deci $\sum_{d \mid k} \mu(d) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-1)^s = 0$.

De asemenea, din definiția funcției $\mu(k)$ mai rezultă $\mu(a, b) = 0$ dacă a nu divide pe b.

c) În acest caz orice interval de forma

$$[a, b] = \{z \mid a \leqslant z \leqslant b\}$$

este un lanț, adică o mulțime total ordonată.
Să calculăm $\mu(a_1, a_n)$ pentru lanțul:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Prin definiție $\mu(a_1, a_1) = 1$. Considerînd intervalul $[a_1, a_2]$ găsim $\mu(a_1, a_1) + \mu(a_1, a_2) = 0$, deci obținem $\mu(a_1, a_2) = -1$. Pentru intervalul $[a_1, a_3]$ deducem ecuația:

$\mu(a_1, a_1) + \mu(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_3) = 0$, de unde obținem $\mu(a_1, a_3) = 0$.

Pentru orice $i \geqslant 3$ putem scrie:

$\mu(a_1, a_1) + \mu(a_1, a_2) + \dots + \mu(a_1, a_i) = 0$, deci $\mu(a_1, a_3) = \dots = \mu(a_1, a_n) = 0$.

În concluzie valorile funcției lui Moebius sînt date de:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = y; \\ -1 & \text{dacă } (x, y) \text{ este un arc;} \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

2.19. Obținem $\sum_{z \leqslant x} \mu(z, x)\, g(z) = \sum_{z \leqslant x} \sum_{y \leqslant z} \mu(z, x) f(y) =$

$= \sum_{y \leqslant x} f(y) \sum_{y \leqslant z \leqslant x} \mu(z, x) = f(x)$, deoarece pentru $y < x$ avem $\sum_{y \leqslant z \leqslant x} \mu(z, x) = 0$.

Într-adevăr, în termenii matricelor M și Z introduse la rezolvarea problemei 2.17, aceasta revine la a arăta că:

$$Z \cdot M = I,$$

egalitate adevărată, deoarece $M = Z^{-1}$.
O altă rezolvare este următoarea:
Notînd $f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ și $g = (g(x_1), \dots, g(x_n))$, definiția lui g se mai scrie:

$$g = f \cdot Z$$

ceea ce implică:

$$f = gZ^{-1} = g \cdot M,$$

adică relația căutată.

2.20. Pentru orice funcție $f : B \to C$, unde $|C| = x$ și x este număr natural vom defini nucleul funcției f ca fiind partiția p a lui B definită astfel:

Elementele b_i și b_j din B aparțin unei aceleiași clase a lui p dacă și numai dacă $f(b_i) = f(b_j)$. Numărul $f(p)$ al funcțiilor $f : B \to C$ care au același nucleu p este egal cu:

$$f(p) = x(x - 1)\dots(x - k + 1) = [x]_k$$

unde $k = c(p)$ este numărul claselor partiției p. Într-adevăr, din definiția nucleului rezultă că numărul căutat este egal cu numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime cu k elemente, cu valori într-o mulțime cu x elemente, adică cu $[x]_k$.

Să notăm $F(p) = \sum_{q \leqslant p} f(q)$.

Rezultă că $F(p)$ reprezintă numărul funcțiilor $f : B \to C$ care au ca nucleu o partiție q a lui B astfel încît $q \leqslant p$.

Deci q se obține prin unificarea anumitor clase ale lui p și în concluzie:

$$F(p) = x^k,$$

deoarece numărul căutat este egal cu numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu k elemente, cu valori într-o mulțime cu x elemente. Am obținut deci că:

$$\sum_{q \leqslant p} [x]_{c(q)} = x^{c(p)}$$

Aplicînd formula de inversiune a lui Moebius găsim:

$$\sum_{q \leqslant p} x^{c(q)} \mu(q, p) = [x]_{c(p)}.$$

Luînd în această formulă $p = 1$ obținem numărul de clase $c(p) = n$. Egalitatea obținută se mai scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \sum_{c(q)=k} \mu(q, 1) = [x]_n.$$

Pentru $k = 1$ obținem în membrul stîng coeficientul lui x egal cu $\mu(0, 1)$, deoarece singura partiție q cu $c(q) = 1$ este partiția 0, în timp ce coeficientul lui x din polinomul

$$[x]_n = x(x - 1)\dots(x - n + 1) \text{ este egal cu } (-1)^{n-1}(n - 1)!.$$

Deoarece egalitatea scrisă are loc pentru orice valoare întreagă a lui x, rezultă că cele două polinoame în x sînt egale, deci $\mu(0, 1) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$. (R.W. Frucht, Gian-Carlo Rota, Scientia, 122 (1968), 111—115).

2.21. Să notăm $U = Z - I = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ unde

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_i \prec x_j; \\ 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Elementul situat pe linia i și coloana j ale matricei U^n este de forma:

$$\sum_{(k_1, \dots, k_{n-1})} u_{ik_1} u_{k_1 k_2} \dots u_{k_{n-1} j} = 0$$

pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant n$, deoarece un element nenul în suma scrisă ar corespunde unui lanț de elemente din V de forma:

$$x_i < x_{k_1} < x_{k_2} < \ldots < x_{k_{n-1}} < x_j.$$

Dar V are numai n elemente, deci un astfel de lanț nu poate exista.

Deci putem scrie egalitatea matriceală:

$$(I + U)(I - U + U^2 - U^3 + \ldots + (-1)^{n-1}U^{n-1}) = I + (-1)^{n-1}U^n = I,$$

astfel încît:

$$I - U + U^2 - U^3 + \ldots = (I + U)^{-1} = Z^{-1} = M,$$

adică matricea care definește funcția lui Moebius a mulțimii V.
Deci:

$$\mu(0, 1) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s u_{0,1}^{(s)},$$

unde $u_{0,1}^{(s)}$ este elementul matricei U^s situat în linia care corespunde elementului 0 al lui V și în coloana care corespunde elementului 1 al lui V.

În continuare obținem:

$$u_{0,1}^{(s)} = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} u_{0i_1} u_{i_1 i_2} \ldots u_{i_{s-1}1} = \sum_{0 < x_{i_1} < \ldots < x_{i_{s-1}} < 1} 1 = p_s,$$

restul termenilor fiind nuli, conform definiției matricei U.

3. NUMERELE LUI STIRLING, BELL, FIBONACCI, CATALAN

3.1. Pentru a obține termenii care îl conțin pe x^k din dezvoltarea lui $[x]_n$ trebuie să înmulțim factorul x din $k - 1$ paranteze dintre $(x - 1)$, $(x - 2)$, ..., $(x - n + 1)$ cu $n - k$ termeni liberi din aceste paranteze.

Dacă $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ este o mulțime de numere, să notăm:

$$P(K) = \prod_{j=1}^{s} i_j.$$

Rezultă că numerele $s(n, k)$ se pot scrie sub forma:

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{P \subset \{1, \ldots, n-1\} \\ |P| = n-k}} P(K) \qquad (1)$$

unde suma din (1) conține $\binom{n-1}{n-k}$ termeni.

Pentru a obține coeficientul lui x^k din dezvoltarea lui $[x]^n$ trebuie să înmulțim $n - k$ termeni liberi din factorii $(x + 1)$, $(x + 2)$, ..., $(x + n - 1)$ și să adunăm numerele obținute după toate cele $\binom{n-1}{n-k}$ alegeri ale termenilor liberi.

Ținînd seama de (1) obținem coeficientul lui x^k din dezvoltarea lui $[x]^n$ egal cu

$$\sum_{\substack{K \subset \{1, \ldots, n-1\} \\ |P|=n-k}} P(K),$$

adică cu $|s(n, k)|$.

3.2. Demonstrăm a), numită formula lui Vandermonde, prin inducție după n. Pentru $n = 1$ obținem egalitate. Dacă a) are loc pentru $n \leqslant m - 1$, unde $m \geqslant 2$, deducem:

$$[x + y]_m = [x + y]_{m-1}(x + y - m + 1) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} [x]_k [y]_{m-k-1} (x -$$

$$- k + y - m + k + 1) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} [x]_{k+1} [y]_{m-k-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} [x]_k [y]_{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\right] [x]_k [y]_{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [x]_k [y]_{m-k}.$$

Formula b), numită formula lui Nörlund, se demonstrează analog.

3.3. Pentru a demonstra a) fie două mulțimi X și Y avînd n, respectiv m elemente. Orice funcție $f : X \to Y$ poate fi considerată surjecție dacă îi schimbăm codomeniul, adică dacă $f : X \to f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$. Deci numărul total de funcții de la X în Y, egal cu m^n, este egal cu numărul funcțiilor din reuniunea mulțimilor:

$$A_k = \{f : X \to Y \mid |f(X)| = k\}$$

după $k = 1, \ldots, m$, aceste mulțimi fiind două cîte două disjuncte. Obținem $|A_k| = \binom{m}{k} s_{n,k} = \binom{m}{k} k!\, S(n, k)$ (problema 3.4.), căci mulțimea $f(X)$ cu k elemente poate fi aleasă în Y în $\binom{m}{k}$ moduri, deci

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{m}{k} k! S(n, k) = \sum_{k=1}^{m} m(m-1) \ldots (m - k + 1)\, S(n, k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [m]_k\, S(n, k) \text{ pentru } n \geqslant m, \text{ deoarece } [m]_k = 0 \text{ pentru } m + 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Trebuie să arătăm că polinomul $x^n - \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, [x]_k$ este identic nul.

Dar acest polinom are gradul cel mult egal cu $n - 1$, deoarece $[x]_n S(n, n) = x(x-1) \ldots (x - n + 1)$ conține termenul x^n, iar ceilalți termeni din sumă nu îl conțin pe x^n. Egalitatea obținută, valabilă pentru $m = 1, 2, \ldots, n$, ne arată că acest polinom, de grad cel mult egal cu $n - 1$, are cel puțin n rădăcini distincte, deci este polinomul nul.

Vom utiliza aceeași idee pentru a demonstra b), considerînd funcțiile monotone $f : X \to R$, unde $|X| = n$, $|R| = r$ și mulțimea R este total ordonată. Orice funcție monotonă $f : X \to R$ este în corespondență bijectivă cu un

cuvînt crescător de lungime n : $f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$, unde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n)$, iar numărul acestor cuvinte crescătoare se numește combinări cu repetiție de r luate cîte n și este dat de formula

$$\frac{[r]^n}{n!} = \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!} \text{ (problema 1.18).}$$

Dacă numărul literelor distincte ale cuvîntului $f(x_1) \ldots f(x_n)$ este k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, aceste k litere pot fi alese din mulțimea R în $\binom{r}{k}$ moduri, iar numărul cuvintelor crescătoare de lungime n formate cu exact k litere este egal cu $\binom{n-1}{k-1}$.

Într-adevăr, dacă cele k litere sînt $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, atunci cuvîntul crescător are forma $c_1 c_2 \ldots c_n$, unde $c_1 = c_2 = \ldots = c_{i_1 - 1} = a_1$;

$$c_{i_1} = c_{i_1+1} = \ldots = c_{i_2-1} = a_2; \ldots; c_{i_{k-1}} = c_{i_{k-1}+1} = \ldots = a_k,$$

iar $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n$, deci numărul cuvintelor crescătoare de lungime n formate cu exact k litere este egal cu numărul șirurilor $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n$, adică cu $\binom{n-1}{k-1}$.

Rezultă că

$$\frac{[r]^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{r}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

sau

$$[r]^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} [r]_k,$$

egalitate valabilă pentru orice $r \geqslant 1$, ceea ce implică b).

3.4. Fiecărei surjecții f a mulțimii $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ pe mulțimea $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ îi corespunde o partiție a mulțimii X în m clase și anume:

$$f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(y_m).$$

Deoarece într-o partiție nu contează ordinea claselor, rezultă că $m!$ funcții surjective de la X pe Y vor genera o aceeași partiție a mulțimii X. Cu alte cuvinte, dacă permutăm în $m!$ moduri diferite elementele din Y, se obțin $m!$ surjecții diferite plecînd de la o surjecție dată f, însă toate vor genera în modul indicat o aceeași partiție a mulțimii X cu m clase. Deoarece două surjecții care diferă printr-o permutare a elementelor lui Y nu pot genera partiții diferite și orice partiție cu m clase a lui X se obține în acest mod, rezultă:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} s_{n,m} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Dacă considerăm mulțimea celor $S(n, m-1)$ partiții ale unei mulțimi cu n elemente $x_1, \ldots, x_n$ în $m-1$ clase, putem obține $S(n, m-1)$ partiții ale unei mulțimi cu $n+1$ elemente $x_1, \ldots, x_{n+1}$ în m clase, adăugînd fiecărei partiții o nouă clasă formată numai din elementul x_{n+1}. Dacă considerăm o partiție a elementelor $x_1, \ldots, x_n$ în m clase, putem adăuga elementul x_{n+1} la clasele deja existente în m moduri diferite. Deoarece în acest mod prin

cele două procedee se obțin fără repetiții toate partițiile mulțimii $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ cu m clase rezultă $S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$. Această recurență permite calculul tabelului numerelor $S(n, m)$ linie cu linie, folosind valorile $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ pentru orice n și $S(n, m) = 0$ pentru $m > n$, care este dat în continuare pentru $n \leqslant 5$:

$S(n, m)$	$m = 1$	2	3	4	5
$n = 1$	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

3.5. Dacă considerăm mulțimea celor $S(n+1, m)$ partiții ale unei mulțimi X cu $n+1$ elemente în m clase și suprimăm clasa care conține cel de al $(n+1)$-lea element, se obțin partițiile unei mulțimi K cu k elemente, unde $m-1 \leqslant k \leqslant n$, în $m-1$ clase. Avem $k \geqslant m-1$, deoarece cele $m-1$ clase rămase conțin fiecare cel puțin un element.

Partițiile astfel obținute, cu $m-1$ clase, sînt diferite între ele, deoarece în caz contrar și partițiile lui X cu $n+1$ elemente în m clase ar fi egale între ele. În acest mod se obțin toate partițiile unei mulțimi $K \subset X$ și $|K| \geqslant m-1$ în m clase.

Într-adevăr, partiția $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ a lui K a fost obținută din partiția $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m \cup (X \setminus K)$ a lui X prin suprimarea clasei $X \setminus K$, care conține al $(n+1)$-lea element.

Deoarece cele $n-k$ elemente care formează o clasă împreună cu cel de al $(n+1)$-lea element pot fi alese în $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ moduri diferite, rezultă că numărul partițiilor unei mulțimi cu $n+1$ elemente în m clase este:

$$S(n+1, m) = \sum_{k=m-1}^{n} \binom{n}{k} S(k, m-1).$$

În mod analog se obține recurența pentru numerele B_n, suprimînd clasa care conține cel de al $(n+1)$-lea element dintr-o partiție a unei mulțimi cu $n+1$ elemente. Se obține astfel o partiție a unei mulțimi cu k elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, iar cele $n-k$ elemente care formează o aceeași clasă împreună cu cel de al $(n+1)$-lea element pot fi alese în mulțimea X din care am suprimat elementul $n+1$ în $\binom{n}{k}$ moduri distincte.

Termenul 1, corespunzător cazului $k = 0$, se obține cînd partiția lui X are o singură clasă.

3.6. Plecînd de la o partiție a mulțimii X de tipul $1^{k_1}\, 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$, putem obține o permutare a lui X prin scrierea elementelor lui X în ordinea în care ele apar în clasele partiției. Presupunem de asemenea că mai întîi scriem clasele cu un element, apoi clasele cu două elemente etc. Deoarece ordinea elementelor într-o clasă și ordinea claselor dintr-o partiție nu sînt esențiale, se obțin $(1!)^{k_1}\, (2!)^{k_2} \ldots (n!)^{k_n}$ permutări diferite ale mulțimii X dintr-o aceeași partiție, prin permutarea elementelor în fiecare clasă și pentru fiecare

din aceste permutări se mai obțin $k_1!\, k_2! \ldots k_n!$ permutări, permutînd clasele cu un același număr de elemente între ele. Este ușor de arătat că în acest mod se generează fără repetiții toate cele $n!$ permutări ale mulțimii X, de unde rezultă că:

$$\mathrm{Part}(1^{k_1}\, 2^{k_2} \ldots n^{k_n}\,;\, n)\;\; (1!)^{k_1} k_1! \ldots (n!)^{k_n} k_n! = n!.$$

Dacă p este o permutare a mulțimii $X = \{1, \ldots, n\}$ de tipul $1^{k_1} \ldots n^{k_n}$, scrisă în ordinea crescătoare a lungimilor ciclurilor, suprimînd parantezele care delimitează ciclurile lui p se obține un cuvînt de lungime n format cu toate literele alfabetului $\{1, \ldots, n\}$. Numărul acestor cuvinte este $n!$.

Dar o aceeași permutare generează $k_1!\, k_2! \ldots k_n!\;\; 1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$ cuvinte diferite, deoarece putem permuta cele k_i cicluri de lungime $i (1 \leqslant i \leqslant n)$ între ele și aceasta se poate face în $k_1! \ldots k_n!$ moduri diferite. Pe de altă parte, un ciclu de lungime i poate fi scris în i moduri distincte, luînd ca prim element al ciclului pe oricare din cele i elemente ale sale și obținînd astfel $1^{k_1} \ldots n^{k_n}$ posibilități.

Deoarece în acest mod se obțin fără repetiții toate cele $n!$ cuvinte de lungime n, formate din toate numerele $1, \ldots, n$, rezultă că:

$$\mathrm{Perm}(1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}\,;\, n)\;\; 1^{k_1} k_1! \ldots n^{k_n} k_n! = n!.$$

3.7. Se folosesc identitățile din problemele 3.2 și 3.3, exprimînd în două moduri diferite polinomul $[x + y]_n$:

$$[x + y]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)(x + y)^k = \sum_{k=0}^{n} s(n, k) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \text{ și}$$

$$[x + y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} s(k, i)\, x^i \sum_{j=0}^{n-k} s(n - k, j)\, y^j.$$

Egalînd coeficienții monomului $x^i y^j$ din aceste două expresii ale lui $[x + y]_n$ se obține prima identitate.

Pentru a II-a recurență se dezvoltă $(x + y)^n$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, [x + y]_k = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [x]_i [y]_{k-i} \text{ și } (x + y)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} S(k, i)\, [x]_i \sum_{j=0}^{n-k} S(n - k, j)\, [y]_j.$$

Egalînd coeficienții lui $[x]_i [y]_j$ din cele două expresii ale lui $(x + y)^n$ se obține a II-a identitate.

3.8. $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n, k) \sum_{m=0}^{k} S(k, m)\, [x]_m$ și

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, [x]_k = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \sum_{m=0}^{k} s(k, m)\, x^m.$$

Egalînd coeficienții lui $[x]_n$, respectiv x^n din expresiile obținute se găsesc identitățile din enunț. Putem egala acești coeficienți, deoarece familiile de polinoame $(x^n)_{n \geqslant 0}$, respectiv $([x]_n)_{n \geqslant 0}$ alcătuiesc cîte o bază pentru spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți numere reale, deci exprimarea oricărui polinom ca o combinație liniară de aceste polinoame este unică.

3.9. Vom demonstra proprietatea prin inducție după n. Pentru $n = 1$ nu avem nimic de demonstrat. Din tabelul numerelor lui Stirling (problema 3.4) se vede că proprietatea are loc pentru valori mici ale lui n, urmărind numerele din fiecare linie a tabelului.

Să presupunem că proprietatea are loc pentru orice $i \leqslant n$. Deci $M(i) \leqslant M(j)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Fie un indice k astfel încît $2 \leqslant k \leqslant M(n)$. Utilizînd recurența:

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$$

deducem:

$$S(n+1, k) - S(n+1, k-1) = (S(n, k-1) - S(n, k-2)) + k(S(n, k) - S(n, k-1)) + S(n, k-1)$$

și membrul drept al acestei egalități este pozitiv conform ipotezei de inducție.

Să presupunem că $M(n) + 2 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Utilizînd recurența:

$$S(n+1, k) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} S(j, k-1)$$

deducem:

$$S(n+1, k) - S(n+1, k-1) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (S(j, k-1) - S(j, k-2)).$$

Conform ipotezei de inducție obținem $S(j, k-1) < S(j, k-2)$, deoarece $M(j) \leqslant M(n)$ pentru orice $j \leqslant n$.

Rezultă că $S(n+1, k) < S(n+1, k-1)$ pentru orice $M(n) + 2 \leqslant k \leqslant n + 1$. Deci șirul $(S(n, k))_{k=1,\ldots,n}$ este unimodal și $M(n+1) = M(n)$ sau $M(n+1) = M(n) + 1$. Nu se cunoaște nici un exemplu de șir $(S(n, k))_k$ care are două maxime egale pentru $n \geqslant 3$.

3.10. Pentru a obține 1) se egalează coeficienții lui x^k din dezvoltările:

$$\sum_{k=0}^{n} s_a(n, k)\, x^k = (x \mid a)_n = (x \mid a)_{n-1}\,(x - a_{n-1}) =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} s_a(n-1, k)\, x^k\right](x - a_{n-1}).$$

Pentru (2) se egalează coeficienții lui $(x \mid a)_k$ din dezvoltările:

$$\sum_{k=0}^{n} S_a(n, k)\,(x \mid a)_k = x^n = x^{n-1} \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} S_a(n-1, k)(x \mid a)_k(x - a_k + a_k),$$

deoarece $(x \mid a)_k\,(x - a_k) = (x \mid a)_{k+1}$.

Pentru 3) se egalează coeficienții lui x^k din dezvoltările $(x \mid a)_n =$

$$= \frac{1}{x - a_n}(x \mid a)_{n+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{a_n}{x^2} + \frac{a_n^2}{x^3} + \ldots\right)(x \mid a)_{n+1},$$

iar pentru 4) se iterează aplicarea recurenței 2) pentru diferite valori ale lui n. Recurența 5) se obține prin aplicarea repetată a recurenței 1) pentru valori descrescătoare ale lui n.

Pentru a obține 6) se scrie de exemplu

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_a(n, k)(x \mid a)_k = \sum_{k=0}^{n} S_a(n, k) \sum_{m=0}^{k} s_a(k, m) x^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} S_a(n, k) s_a(k, m) \right) x^m.$$

(L. Comtet, C.R. Acad. Sc., Paris, A275(1972), 747—750).

3.11. Se notează $f_k = \sum_{n=k}^{\infty} S_a(n, k) t^n$ și se obține $f_k = \sum_{n \geqslant k} (S_a(n-1, k-1) + a_k S_a(n-1, k)) t^n = t f_{k-1} + a_k t f_k$. Deci $f_k = \frac{f_{k-1} t}{1 - a_k t} = \ldots =$

$= \frac{f_0 t^k}{(1 - a_1 t) \ldots (1 - a_k t)}$ și $f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n t^n = \frac{1}{1 - a_0 t}$.

3.12. Dacă $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, mulțimea partițiilor lui X în k clase care conțin cel puțin i elemente poate fi scrisă sub forma $P_1 \cup P_2$, unde P_1 reprezintă mulțimea partițiilor lui X în k clase care conțin cel puțin i elemente, pentru care elementul x_n aparține unei clase cu mai mult de i elemente, iar P_2 reprezintă mulțimea partițiilor cu aceleași proprietăți, pentru care x_n aparține unei clase cu exact i elemente.

Rezultă că $S_i(n, k) = |P_1| + |P_2| = kS_i(n-1, k) + \binom{n-1}{i-1} S_i(n-i, k-1)$, deoarece partițiile din P_1 se generează fără repetiții plecînd de la partițiile mulțimii $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ cu k clase de cardinal mai mare sau egal cu i, adăugînd în k moduri pe x_n pe rînd în fiecare clasă, iar partițiile din P_2 se obțin considerînd toate cele $\binom{n-1}{i-1}$ submulțimi de cardinal i ale lui X care îl conțin pe x_n ca o clasă a partiției, la care se adaugă pe rînd cele $S_i(n-i, k-1)$ partiții ale celor $n-i$ elemente rămase în $k-1$ clase, de cardinal mai mare sau egal cu i.

Pentru a justifica 2), să observăm că $\frac{n!}{k! j_1! \ldots j_k!}$ reprezintă numărul partițiilor lui X în k clase, care conțin respectiv $j_1, \ldots, j_k$ elemente, unde $j_1 + \ldots + j_k = n$ și $j_s \geqslant i$ pentru orice $1 \leqslant s \leqslant k$. Într-adevăr, dacă desființăm delimitatorii dintre clase, se obține o permutare a lui X. Numărul celor $n!$ permutări trebuie însă împărțit la $k! j_1! \ldots j_k!$, deoarece într-o partiție nu contează ordinea claselor și nici ordinea elementelor într-o clasă. Însumînd aceste numere după toate soluțiile ecuației $j_1 + \ldots + j_k = n$ se obține rezultatul căutat.

3.13. Orice partiție cu două clase $X = A \cup B$ este complet determinată de mulțimea A care este diferită de X și de $\emptyset$. Deci numărul de alegeri pentru A este egal cu numărul de submulțimi ale mulțimii X cu n elemente, mai puțin 2. Deci $S(n, 2) = (2^n - 2)/2 = 2^{n-1} - 1$, deoarece într-o partiție nu contează ordinea claselor.

În mod analog, orice partiție a lui X cu $n-1$ clase conține o clasă cu două elemente și $n-2$ clase cu cîte un element, iar cele două elemente pot fi alese în $\binom{n}{2}$ moduri.

Pentru a justifica 3) să arătăm mai întîi că funcția generatoare exponențială a numerelor lui Stirling de speța a doua este:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{S(n, k)}{n!} x^n = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$$

Într-adevăr, avem $e^{px} = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p^2x^2}{2!} +$ iar $\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$ $= \frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}e^{px}$, deci coeficientul lui x^n din această dezvoltare este egal cu $\frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}\frac{p^n}{n!} = \frac{S(n, k)}{n!}$, ținînd seama de expresia numerelor lui Stirling de speța a II-a (problema 3.4).

Deci $k!S(n, k)$ este coeficientul lui x^n din dezvoltarea $(e^x - 1)^k$, înmulțit cu $n!$, de unde rezultă că $\frac{1}{n!}(1 - 1!\,S(n, 2) + 2!\,S(n, 3) - 3!S(n, 4) \ldots)$ este coeficientul lui x^n din dezvoltarea sumei de serii:

$$e^x - 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 - \frac{1}{4}(e^x - 1)^4 + \qquad (1)$$

Deoarece $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \ln(1 + x)$, suma (1) este egală cu $\ln(1 + e^x - 1) = x$, ceea ce demonstrează identitatea pentru $n \geqslant 2$.

3.14. Pentru a obține expresia lui $c(n, 3)$ trebuie să vedem în cîte moduri putem scrie $X = A \cup B \cup C$ cu A, B, C nevide și astfel încît fiecare element din X să aparțină la două din mulțimile A, B sau C. Deci fiecare element $x \in X$ poate să aparțină în $\binom{3}{2} = 3$ moduri mulțimilor A, B sau C.

În acest mod se obțin 3^n scrieri ale lui X ca $A \cup B \cup C$, dintre care 3 nu verifică condiția impusă, deoarece corespund cazurilor cînd A, B sau C sînt vide.

Deci numărul de biacoperiri cu 3 clase ale lui X este egal cu $(3^n - 3)/3! = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$, deoarece nu contează ordinea celor trei submulțimi A, B și C.

(L. Comtet, Studia Sci. Math. Hung., 3(1968), 137—152).

3.15. Se consideră un nou element $z \notin X$ și pentru orice partiție a mulțimii $X \cup \{z\}$ se suprimă clasa care conține elementul z.

Se obțin astfel toate partițiile parțiale ale lui X fără repetiții, înafara cazului cînd partiția lui $X \cup \{z\}$ constă dintr-o singură clasă. Deci numărul căutat este $B_{n+1} - 1$.

3.16. Fiind dat un șir $(a_n)_{n\in N}$ de numere reale, vom nota prin $f(x)$ suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n[x]_n$ pentru acele valori ale lui x pentru care seria este convergentă.

Vom defini operatorul L prin relația $L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, căruia îi atribuim un sens numai dacă această serie este convergentă.

Să arătăm că dacă $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și operatorul L este aplicabil funcției g, atunci $L(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n$, unde $B_0 = 1$.

Într-adevăr, ținînd seama de problema 3.3, obținem sumele parțiale:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=1}^{n} [x]_k \, S(n, k) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{n=k}^{m} a_n \, S(n, k) \right) [x]_k,$$

unde $[x]_0 = 1$.

$$\text{Deci } L(g(x)) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{n=k}^{m} a_n \, S(n, k) \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} S(n, k) \right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n B_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n.$$

Pentru a obține formula căutată, vom considera dezvoltarea în serie Taylor:

$$\exp(tx) = e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{t^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n x^n}{n!} + \ldots$$

Făcînd substituția $e^t = u + 1$, deducem

$$e^{tx} = (u + 1)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x]_n}{n!} u^n,$$

cu formula generalizată a binomului lui Newton.

$$\text{Deci } L(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = e^u = \exp(e^t - 1).$$

Conform celor demonstrate anterior obținem:

$$L(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Egalînd cele două expresii ale lui $L(e^{tx})$ se obține expresia funcției generatoare exponențiale a numerelor B_n.

3.17. Conform definiției, numărul lui Bell B_n reprezintă numărul tuturor partițiilor unei mulțimi cu n elemente, deci putem scrie:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n, k),$$

deoarece $S(n, k) = 0$ pentru $k > n$.

Ținînd seama de expresia numerelor lui Stirling de speța a doua (problema 3.4) obținem:

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!}.$$

Diferența dintre numărul partițiilor cu un număr par și un număr impar de clase ale unei mulțimi cu n elemente este egal cu

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S(n,k)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k S(n,k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j j^n}{j!}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{(k-j)!}=e\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j j^n}{j!}.$$

3.18. Unei submulțimi $S\subset X$ îi vom pune în corespondență un cuvînt binar $a_1a_2\ldots a_n$ cu $a_i=1$ dacă $i\in S$ și $a_i=0$ în caz contrar. Dacă S nu conține doi întregi consecutivi, rezultă că cuvîntul binar asociat mulțimii S nu va conține doi de 1 alăturați. Am definit astfel o bijecție de la familia submulțimilor lui X cu k elemente care nu conțin doi întregi consecutivi pe mulțimea cuvintelor binare de lungime n, dintre care k sînt 1 și $n-k$ sînt 0 și care nu conțin doi de 1 vecini. Pentru a evalua numărul de elemente din această ultimă mulțime, vom considera $n-k$ cifre egale cu 0 și numerotate de la 1 la $n-k$, cărora trebuie să le adăugăm k cifre egale cu 1, astfel încît să nu apară doi de 1 alăturați. Fiecare cifră 1 poate fi caracterizată prin numărul de ordine al cifrei 0 care o precedă. Deci trebuie să alegem k întregi distincți doi cîte doi din mulțimea $\{0, 1, .., n-k\}$, ceea ce este posibil în $f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$ moduri distincte. La mulțimea $\{1, \ldots, n-k\}$ a numerelor de ordine ale cifrelor egale cu zero l-am adăugat pe 0, ceea ce corespunde cazului cînd cifra 1 este situată pe prima poziție a cuvîntului $a_1a_2\ldots a_n$.

Rezultă că F_{n+1} reprezintă numărul tuturor submulțimilor lui X care nu conțin doi întregi consecutivi, luînd în considerare și mulțimea vidă căreia îi corespunde cuvîntul cu n poziții egale cu 0. Suma care îl definește pe F_{n+1} conține termeni nenuli pentru $n-k+1\geqslant k$ sau $k\leqslant[(n+1)/2]$.

Pentru a justifica recurența verificată de numerele lui Fibonacci, să observăm că orice cuvînt de lungime n format cu 0 și 1, care nu conține doi de 1 consecutivi, are pe ultima poziție 0 sau are pe ultimele două poziții 01, iar cuvintele care rămîn după eliminarea terminației 0, respectiv 01 au lungimile $n-1$, respectiv $n-2$ și nu conțin doi de 1 consecutivi. Deci există o bijecție de la mulțimea cuvintelor de lungime n formate cu 0 și 1 care nu conțin doi de 1 consecutivi pe reuniunea mulțimilor disjuncte formate din cuvintele de lungime $n-1$ care nu conțin doi de 1 consecutivi, respectiv din cuvintele de lungime $n-2$ formate din 0 și 1 care nu conțin doi de 1 consecutivi. Deci $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ pentru orice $n\geqslant 2$, iar $F_0=F_1=1$.

3.19. Pentru a găsi expresia numerelor $f^*(n,k)$, să observăm că submulțimile care conțin numărul n nu pot conține nici numărul $n-1$, nici numărul 1 și sînt în număr de $f(n-3,k-1)$, iar cele care nu conțin numărul n sînt în număr de $f(n-1,k)$, presupunînd în ambele cazuri că ele nu conțin doi întregi consecutivi modulo $n+1$.

De exemplu, submulțimile care conțin numărul n se obțin din cele $f(n-3, k-1)$ submulțimi ale lui $X\setminus\{1, n-1, n\}$ care au $k-1$ elemente și nu conțin doi întregi consecutivi, prin adăugarea lui n.

Ținînd seama că orice submulțime a lui X cu k elemente, care nu conține doi întregi consecutivi modulo $n+1$, aparține reuniunii acestor două mulțimi

disjuncte de submulțimi cu k elemente care nu conțin doi întregi consecutivi, rezultă:

$$f^*(n, k) = f(n-3, k-1) + f(n-1, k) = \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} =$$

$$= \left(\frac{k}{n-k} + 1\right)\binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Numerele lui Lucas se exprimă în funcție de numerele lui Fibonacci astfel:

$$L_n = \sum_{k\geqslant 0} f^*(n, k) = \sum_{k\geqslant 0}(f(n-1, k) + f(n-3, k-1)) = \sum_{k\geqslant 0} f(n-1, k) +$$

$$+ \sum_{k\geqslant 1} f(n-3, k-1) = F_n + F_{n-2}. \text{ Deci putem scrie:}$$

$L_{n+1} = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} = L_n + L_{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$.

Obținem $L_1 = 1$ și $L_2 = 3$. De obicei se definește $L_0 = 2$, ținînd seama de recurența satisfăcută de numerele lui Lucas, pentru a găsi astfel valoarea $L_2 = 3$.

3.20. Vom demonstra mai întîi prin inducție după n că

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

pentru orice $n \geqslant 1$. Pentru $n = 1$ obținem $F_0 = F_1 = 1$ și $F_2 = 2$, iar în membrul stîng al egalității (1) obținem același rezultat.
Presupunînd că are loc (1), deducem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+2} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

deci (1) este adevărată pentru orice n. Egalînd determinanții matricelor din ambii membri din (1) obținem recurența cerută.

3.21. Este clar că numărul u_n reprezintă în același timp numărul de scrieri ale întregului n ca o sumă de numere 1 sau 2, două scrieri fiind distincte dacă ele diferă și prin ordinea termenilor.
De exemplu:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Primul termen este 1 sau 2. În primul caz numărul de scrieri este egal cu u_{n-1}, deoarece restul termenilor sînt egali cu 1 sau cu 2 și au suma $n-1$ și în al doilea caz numărul de scrieri este egal cu u_{n-2}. Deci am obținut recurența:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{1}$$

cu valorile inițiale $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Definind $u_0 = 1$ obținem șirul numerelor lui Fibonacci, deci $u_n = F_n$. Pentru a rezolva recurența (1) scriem ecuația caracteristică:

$$r^2 = r + 1$$

care are soluțiile $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, deci soluția generală are forma:

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

unde constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale $u_0 = 1$ și $u_1 = 1$. Obținem sistemul:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

de unde se deduce: $C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ și $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, deci

$$u_n = F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

pentru orice $n \geqslant 0$.

Dacă notăm $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, obținem pe rînd:

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \text{ și } x^2 f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n,$$

deci ținînd seamă de (1) deducem:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n = F_0 = 1,$$

de unde

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

3.22. Deoarece șirul numerelor lui Fibonacci conține termeni oricît de mari, rezultă că există un indice m astfel încît să avem $F_m \leqslant n < F_{m+1}$. Obținem în continuare $0 \leqslant n - F_m < F_{m+1} - F_m = F_{m-1}$.

Deci dacă $n - F_m > 0$, ținînd seama că 1 este un termen al șirului Fibonacci, găsim un indice $s \leqslant m - 2$ astfel încît să avem:

$$F_s \leqslant n - F_m < F_{s+1}.$$

Deducem ca mai înainte că $0 \leqslant n - F_m - F_s < F_{s-1}$.

Dacă $n - F_m - F_s = 0$ am obținut scrierea căutată și ne oprim. În caz contrar repetăm același raționament și într-un număr finit de pași obținem scrierea căutată:

$$n = F_m + F_s + F_p + \ldots + F_q,$$

unde indicii a doi termeni consecutivi din sumă diferă prin cel puțin 2 unități.

3.23. Numărul lui Catalan T_n se definește ca fiind egal cu numărul de moduri în care putem pune parantezele într-un produs neasociativ de n factori scriși în ordinea $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă există o singură pereche de paranteze care nu sînt conținute în alte paranteze, atunci această pereche conține în interior produsul factorilor $x_2, \ldots, x_n$, rămînînd în exterior factorul x_1, sau conține în interior produsul factorilor $x_1, \ldots, x_{n-1}$, rămînînd înafară factorul x_n.

Dacă există două perechi de paranteze care nu sînt conținute în alte paranteze, rezultă că aceste perechi conțin produsul factorilor $x_1, \ldots, x_k$, respectiv $x_{k+1}, \ldots, x_n$ unde $2 \leqslant k \leqslant n-2$.

Deoarece într-un produs de k, respectiv $n-k$ factori putem pune parantezele în T_k, respectiv T_{n-k} moduri, rezultă relația de recurență satisfăcută de numerele lui Catalan:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k},$$

unde $T_1 = 1$.

Notînd ca în enunț $f(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \ldots + T_n x^n + \ldots$ găsim

$$f^2(x) = T_1^2 x^2 + (T_1 T_2 + T_2 T_1)x^3 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k} \right) x^n + \ldots = f(x) - x,$$

ținînd seama de relația de recurență obținută și de faptul că $T_1 = T_2 = 1$.

Rezolvînd ecuația de gradul doi:

$$f^2(x) - f(x) + x = 0$$

găsim $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. Vom considera în continuare $x < \dfrac{1}{4}$ și deoarece $f(0) = 0$ observăm că trebuie să luăm semnul minus în fața radicalului. Deci obținem:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Vom dezvolta în serie de puteri ale lui x funcția $\sqrt{1-4x}$ folosind formula generalizată a binomului lui Newton pentru exponenți reali, care are forma:

$$(x+a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} a^{\alpha-2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} a^{\alpha-k} x^k + \ldots,$$

unde $a > 0$.

Această serie este convergentă pentru orice x care verifică $|x| < a$. Dacă $\alpha \in R$ este un număr întreg și pozitiv, numai un număr finit de termeni ai seriei sînt nenuli și dezvoltarea obținută este tocmai formula binomului lui Newton. Probabil pentru această generalizare formula binomului poartă numele lui Newton, deoarece din punct de vedere istoric ea nu a fost descoperită de Newton. Astfel, matematicienii din Asia Centrală ca Omar Khayyam o cunoșteau cu mult înaintea lui Newton, iar în Europa occidentală chiar Blaise Pascal o folosea înaintea lui Newton.

Pentru a dezvolta pe $(1 - 4x)^{1/2}$ în serie de puteri ale lui x vom nota $y = -4x$, $\alpha = \frac{1}{2}$ și vom dezvolta binomul $(y + 1)^{1/2}$. Găsim coeficientul lui x^n egal cu:

$$\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\ldots(1/2 - n + 1)}{n!}(-4)^n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{n!}(-1)^n 2^{2n} =$$

$$= -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\,n!}2^n = -2\frac{(2n-2)!}{n(n-1)!\,(n-1)!} = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Însă T_n este coeficientul lui x^n din dezvoltarea lui $f(x)$, deci se obține din coeficientul lui x^n din dezvoltarea lui $(1 - 4x)^{1/2}$ prin înmulțire cu $-\frac{1}{2}$. Găsim $T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

3.24. Vom determina numărul de șiruri de litere care conțin litera a de k ori și litera b de m ori și care au proprietatea (P): Pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant m+k$, numărul de litere a în primele i litere ale șirului este mai mare sau egal cu numărul de litere b. Este clar că numărul acestor șiruri este nenul dacă și numai dacă este îndeplinită condiția $k \geqslant m > 0$. Numărul șirurilor de litere care conțin litera a de k ori și litera b de m ori este egal cu $P(m, k) = \frac{(m+k)!}{m!\,k!} = \binom{m+k}{m}$. Dacă vom determina numărul șirurilor care nu verifică (P), atunci numărul căutat se obține prin scăderea acestui număr din $\binom{m+k}{m}$. Vom arăta că numărul șirurilor formate din m litere b și k litere a care nu verifică (P) este egal cu $P(m-1, k+1) = \binom{m+k}{m-1}$, adică este egal cu numărul tuturor șirurilor formate din $m - 1$ litere b și din $k + 1$ litere a. Demonstrația acestei proprietăți se face după cum urmează:

Se consideră un șir format din m litere b și k litere a care nu verifică (P). Va exista o poziție cu numărul $2s + 1$ unde $s \geqslant 0$, astfel încît șirul considerat conține litera b în poziția $2s + 1$, iar în fața acestei poziții există un număr egal de litere a și b, număr egal cu s.

Vom considera cel mai mic indice s cu această proprietate și vom adăuga litera a în fața acestui șir, obținînd astfel un șir format din m litere b și $k + 1$ litere a. Prima literă a șirului astfel obținut este a, iar printre primele $2s + 2$ litere există un număr egal de litere a și b. Vom schimba litera b în a și litera a în b pe primele $2s + 2$ poziții ale șirului.

Deoarece în primele $2s + 2$ poziții numărul de litere a a fost egal cu numărul literelor b, nu se va schimba numărul total de litere de fiecare fel și obținem un șir format din m litere b și $k + 1$ litere a. Prima literă este acum b.

Astfel am asociat fiecărui șir din m litere b și k litere a care nu satisface (P), un șir format din m litere b și $k + 1$ litere a, care începe cu litera b. Această aplicație este injectivă. Demonstrația acestei proprietăți este imediată, considerînd două șiruri diferite care nu satisfac (P) și care diferă pe o poziție de rang $p \leqslant 2s + 1$ sau $p > 2s + 1$.

Vom demonstra că în acest mod este posibil să se obțină orice șir format din m litere b și $k + 1$ litere a, care începe cu litera b, deci aplicația este și surjectivă.

Să considerăm un astfel de șir. Deoarece presupunem $m \leqslant k$ sau $m < k + 1$, va exista o poziție pînă la care există un număr egal de litere a și b, pentru că șirul începe cu litera b.

Dacă pînă la prima poziție cu aceste proprietăți înlocuim literele a prin b și b prin a și suprimăm prima literă a, vom găsi un șir format din k litere a și m litere b care nu verifică (P).

Dacă aplicăm acestui șir transformarea descrisă găsim șirul de la care am plecat. Deci în virtutea acestei bijecții numărul șirurilor cu m litere b și k litere a care nu verifică (P) este egal cu numărul șirurilor cu m litere b și $k + 1$ litere a care încep cu b. Dacă suprimăm prima literă b găsim toate șirurile formate din $m - 1$ litere b și $k + 1$ litere a, al căror număr este egal cu

$$P(m - 1, k + 1) = \binom{m + k}{m - 1}.$$

Rezultă că numărul șirurilor care satisfac (P) este egal cu

$$\binom{m + k}{m} - \binom{m + k}{m - 1} = \frac{k - m + 1}{k + 1}\binom{m + k}{m}.$$

Pentru $k = m = n - 1$ obținem numărul $T_n = \frac{1}{n}\binom{2n - 2}{n - 1}$.

Este clar că acest număr reprezintă soluția problemei noastre, deoarece dacă îl înlocuim pe 1 prin litera a și pe -1 prin litera b condiția a) exprimă faptul că numărul literelor a este cel puțin egal cu numărul literelor b în primele k poziții ale șirului, pentru $1 \leqslant k \leqslant 2n - 2$. Condiția b) exprimă faptul că numărul literelor a este egal cu numărul literelor b și ambele sînt egale cu $n - 1$.

3.25. Vom arăta că există o bijecție de la triangulațiile unui poligon convex cu $n + 1$ vîrfuri la mulțimea scrierilor cu paranteze ale unui produs de n factori în ordinea $x_1, \ldots, x_n$.

Dacă poligonul cu $n + 1$ vîrfuri este $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ ne vom deplasa din A_1 în A_2 ș.a.m.d. pe laturile poligonului pînă cînd ajungem în A_{n+1}, obținînd o scriere cu paranteze a unui produs cu n factori, după regulile următoare:

Cînd ne deplasăm pe o latură scriem un nou factor x_i, în ordinea $x_1, \ldots, x_n$;

Cînd ajungem într-un vîrf la care sosesc anumite diagonale ale triangulației, scriem un număr de paranteze de închidere egal cu numărul de diagonale care au o extremitate în acel vîrf și pentru care cealaltă extremitate a fost parcursă și un număr de paranteze de deschidere egal cu numărul de diagonale care sînt incidente în acel vîrf și pentru care cealaltă extremitate nu a fost vizitată.

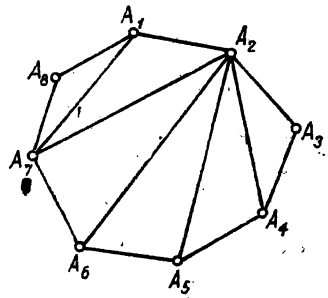


Fig. 3.1.

Astfel pentru triangulația poligonului convex cu 8 vîrfuri din figura 3.1 găsim, prin această corespondență, următoarea scriere cu paranteze a unui produs de 7 factori:

$$(x_1((((x_2x_3)x_4)x_5)x_6))x_7.$$

Este clar că această corespondență este injectivă.

Pentru a arăta că este și surjectivă, vom considera un produs cu paranteze a n factori în ordinea $x_1, \ldots, x_n$.

Acest produs conține $n - 2$ paranteze de deschidere și $n - 2$ paranteze de închidere.

Fiecărei paranteze de deschidere îi corespunde o unică paranteză de închidere. Pentru fiecare pereche formată dintr-o paranteză de deschidere și o paranteză de închidere vom considera prima literă care se găsește la dreapta parantezei de deschidere, fie x_i și prima literă care se găsește la stînga parantezei de închidere, fie x_j și vom duce diagonala A_iA_{j+1}.

Deoarece fiecare pereche de paranteze conține în interior un produs a doi factori și parantezele sînt corect puse, cele $n - 2$ diagonale ale poligonului constituie o triangulație a acestuia.

Aplicînd acestei triangulații corespondența descrisă, găsim produsul cu paranteze a n factori de la care am plecat, ceea ce demonstrează că ea este o bijecție.

Deci numărul de triangulații este egal cu numărul lui Catalan T_n (Euler).

3.26. Considerînd un sistem de axe xOy vom desena dreptele de ecuații $x = k, y = l$ unde $0 \leqslant k, l \leqslant n$ sînt numere întregi și vom considera punctele de intersecție ale acestor drepte situate în primul cadran pe prima bisectoare și sub prima bisectoare.

Pentru fiecare funcție crescătoare $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ vom construi un drum în această rețea în felul următor: Dacă ne găsim în punctul $M(i, f(i))$ ne deplasăm în punctul $M_1(i + 1, f(i))$ pe un segment orizontal, apoi ne deplasăm pe segmente verticale pînă cînd ajungem în punctul $M_2(i + 1, f(i + 1))$. Dacă $f(i + 1) = f(i)$ obținem $M_2 = M_1$; în caz contrar deplasarea are loc în sus, deoarece $f(i + 1) > f(i)$.

Efectuînd aceste deplasări pentru $i = 1, ..., n - 1$ obținem un drum urcător în această rețea, de extremități $(1, 0)$ și $(n, f(n))$. Unind apoi originea O cu punctul $(1, 0)$ printr-un segment orizontal și în cazul cînd $f(n) < n$ punctul $(n, f(n))$ cu punctul $A(n, n)$ situat pe prima bisectoare printr-un șir de segmente verticale, obținem un drum de extremități $O(0, 0)$ și $A(n, n)$.

Pentru exemplul din figura 3.2 funcția crescătoare f este definită astfel: $f(1) = f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = f(5) = 4$, iar drumul obținut este desenat cu linii îngroșate.

Este clar că drumul astfel obținut este compus din $2n$ segmente orizontale și verticale, dintre care n sînt orizontale și n sînt verticale, nu are coborîșuri cînd ne deplasăm de la O către A și este situat sub prima bisectoare. Corespondența astfel definită de la mulțimea funcțiilor crescătoare $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ care satisfac condiția $f(x) \leqslant x$ pentru orice $x = 1, ..., n$ pe mulțimea drumurilor de extremități O și A cu proprietățile menționate este o bijecție. Într-adevăr, ea este injectivă, deoarece la funcții diferite corespund drumuri diferite.

Pentru a arăta că ea este și surjectivă, fie d un drum cu proprietățile menționate, de extremități O și A. Vom defini funcția crescătoare f_d astfel:

$$f_d(i) = \max \{j \mid (i, j) \in d\}$$

pentru orice $i = 1, ..., n$. În acest caz imaginea funcției f_d prin corespondența descrisă este chiar drumul d, ceea ce demonstrează surjectivitatea acestei corespondențe.

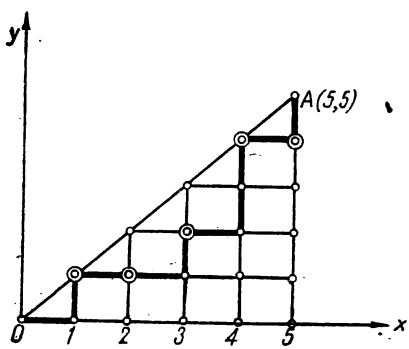


Fig. 3.2.

Pentru a număra drumurile urcătoare de lungime $2n$ de extremități O și $A(n, n)$ situate sub prima bisectoare, să observăm că există o bijecție de la mulțimea acestor drumuri pe mulțimea șirurilor $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ cu $x_i = 1$ sau $x_i = -1$ pentru $1 \leqslant i \leqslant 2n$ care satisfac condițiile:

a) $x_1 + ... + x_k \geqslant 0$ pentru orice $k = 1, ..., 2n$ și

b) $x_1 + ... + x_{2n} = 0$. Pentru a defini această corespondență să ne deplasăm pe un drum urcător d de la O la A. Drumul d se poate scrie ca un șir de segmente de lungime 1, $d = (s_1, s_2, ..., s_{2n})$, ordinea indicilor indicînd ordinea de parcurgere a segmentelor cînd ne deplasăm de la O la A. Șirul asociat drumului se obține din șirul $(s_1, ..., s_{2n})$ scriind în locul fiecărui segment orizontal numărul 1 și în locul fiecărui segment vertical numărul -1.

Astfel, pentru drumul din figura 3.2 obținem șirul:

$$(1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1).$$

Condiția a) exprimă tocmai faptul că drumul d nu poate trece prin puncte situate deasupra primei bisectoare a axelor, iar condiția b) faptul că el conține n segmente orizontale și n segmente verticale, deci faptul că el se termină în punctul A.

Conform problemei 3.24 numărul șirurilor $(x_1, ..., x_{2n})$ formate din 1 și -1 cu proprietățile enunțate este egal cu $T_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, ceea ce încheie demonstrația.

3.27. Pentru $n = 4$ numărul de soluții este egal cu 2. Fie acum $n \geqslant 5$. Un vîrf v_1 al poligonului poate fi ales în n moduri. Să unim cele două vîrfuri vecine cu v_1 printr-o diagonală d_1. Triunghiul care are o latură pe d_1 și un vîrf de cealaltă parte a lui d_1 față de v_1 trebuie să aibă o latură în comun cu poligonul convex. Deci a treia latură trebuie să fie una din cele două diagonale care unesc un vîrf situat pe d_1 cu vecinul, diferit de v_1, al celuilalt vîrf care se găsește pe d_1. În concluzie, a doua diagonală d_2 poate fi aleasă în 2 moduri.

În mod analog, dacă $d_1, ..., d_i$ $(i < n - 3)$ au fost alese, obținem două posibilități pentru d_{i+1}. Deci am găsit $n2^{n-4}$ moduri de a alege vîrful x_1 și un șir $d_1, d_2, ..., d_{n-3}$ de diagonale cu proprietățile cerute.

Orice triangulație astfel obținută are două triunghiuri care conțin cîte două laturi adiacente ale poligonului, deci fiecare este numărată de două ori. Rezultă că numărul căutat este $n2^{n-5}$, pentru orice $n \geqslant 4$.

3.28. Dacă se notează prin $f_j(n + 1)$ numărul acestor șiruri cu $n + 1$ termeni și $a_1 = j$, se obține $f_j(n + 1) = f_{j-1}(n) + f_{j+1}(n)$ pentru $j \geqslant 1$ și $f_0(n + 1) = f_1(n)$.

Vom demonstra prin inducție după $k \geqslant 1$ că pentru orice $k \leqslant n$ are loc relația:

$$f_0(n) = \sum_{j \leqslant k/2} A_{k,j} f_{k-2j}(n - k), \tag{1}$$

unde $A_{k,j} = \binom{k}{j} - \binom{k}{j-1}$ pentru $0 \leqslant 2j \leqslant k$.

Într-adevăr, pentru $k = 1$ relația (1) devine $f_0(n) = f_1(n - 1)$, care am văzut că este o relație adevărată. Presupunînd că avem $k < n - 1$ și are loc (1),

înlocuind în (1) pe $f_{k-2j}(n-k)$ prin $f_{k-2j-1}(n-k-1)+f_{k-2j+1}(n-k-1)$, deducem că:

$$f_0(n)=\sum_{j\leqslant (k+1)/2} A_{k+1,j}f_{k+1-2j}(n-(k+1)),$$

unde $A_{k+1,j}=A_{k,j}+A_{k,j-1}=\binom{k}{j}-\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j-1}-\binom{k}{j-2}=\binom{k}{j}+$

$+\binom{k}{j-1}-\left[\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j-2}\right]=\binom{k+1}{j}-\binom{k+1}{j-1}$ pentru $0\leqslant 2j\leqslant k+$

$+1$, deci (1) este adevărată pentru orice $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Înlocuind în (1), $n=k+1$, obținem $f_0(n)=\sum_{j\leqslant k/2} A_{k,j}=\binom{k}{[k/2]}$.

(L. Carlitz, Math. Nachr., 49(1971), 125—147).

3.29. Dacă $a_1=j$ și $|a_i-a_{i+1}|\leqslant 1$, să notăm numărul corespunzător de șiruri prin $g_j(n+1)$.

Este ușor de dedus că $g_0(n+1)=g_0(n)+g_1(n)$ și $g_j(n+1)=g_{j-1}(n)+$ $+g_j(n)+g_{j+1}(n)$ pentru $j\geqslant 1$.

De asemenea, deoarece putem scrie:

$$(1+x+x^2)^{n+1}=\left[\sum_{k\geqslant 0} c(n,k)x^k\right](1+x+x^2),$$

obținem că:

$$c(n+1,k)=c(n,k-2)+c(n,k-1)+c(n,k),$$

unde se notează $c(n,k)=0$ pentru $k<0$.

Găsim deci:

$$g_0(n)=g_0(n-1)+g_1(n-1)=2g_0(n-2)+2g_1(n-2)+g_2(n-2)=$$
$$=4g_0(n-3)+5g_1(n-3)+3g_2(n-3)+g_3(n-3)=9g_0(n-4)+$$
$$+12g_1(n-4)+9g_2(n-4)+4g_3(n-4)+g_4(n-4)=\ldots.$$

În general găsim:

$$g_0(n)=\sum_{j=0}^{k} B_{k,j}\,g_{k-j}(n-k) \tag{1}$$

pentru orice $0\leqslant k\leqslant n-1$.

Relația (1) se demonstrează prin inducție după k. Am văzut că (1) este adevărată pentru $k=0,1,2,3,4$. Presupunînd că (1) este adevărată pentru toate valorile $k\leqslant p\leqslant n-2$, vom arăta că $g_0(n)=\sum_{j=0}^{p+1} B_{p+1,j}g_{p+1-j}(n-p-1)$ (2)

Într-adevăr, înlocuind în (1) pe k prin p și substituind valoarea $g_{p-j}(n-p)$ prin $g_{p-1-j}(n-p-1)+g_{p-j}(n-p-1)+g_{p-j+1}(n-p-1)$ pentru $j=$ $=0,\ldots,p$, găsim o expresie de forma (2), unde coeficienții $B_{p+1,j}$ sînt dați de recurența:

$$B_{p+1,j}=B_{p,j-2}+B_{p,j-1}+B_{p,j} \tag{3}$$

Vom arăta în continuare că există relația $B_{k,j}=c(k,j)-c(k,j-2)$ pentru orice $0\leqslant j\leqslant k$.

Într-adevăr, pentru $k = 1$ egalitatea se verifică, deoarece $B_{1,0} = c(1, 0) = 1$ și $B_{1,1} = c(1,1) = 1$.

Presupunînd că egalitatea are loc pentru orice $k \leqslant p$ și orice $0 \leqslant j \leqslant k$, găsim:

$B_{p+1,j} = B_{p,j-2} + B_{p,j-1} + B_{p,j} = c(p, j-2) - c(p, j-4) + c(p, j-1) - c(p, j-3) + c(p, j) - c(p, j-2) = c(p+1, j) - c(p+1, j-2)$, ținînd seama de ipoteza de inducție și de recurența verificată de numerele $c(m, k)$. Deci putem scrie:

$$g_0(n) = \sum_{j=0}^{k} (c(k, j) - c(k, j-2)) g_{k-j}(n-k)$$

pentru orice $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Luînd $n = k+1$ deducem

$$g_0(k+1) = \sum_{j=0}^{k} (c(k,j) - c(k, j-2))\, g_{k-j}(1) = \sum_{j=0}^{k} (c(k,j) - c(k, j-2)) =$$

$= c(k, k) + c(k, k+1)$ pentru orice $k \geqslant 0$, deoarece $g_{k-j}(1) = 1$.
(L. Carlitz, Math. Nachr., 49(1971), 125—147).

3.30. Se ține seama de problema 3.24 care afirmă că numărul șirurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ cu termeni 1 sau -1, care verifică condițiile: $x_1 + \ldots + x_k \geqslant 0$ pentru orice $1 \leqslant k \leqslant 2n$ și $x_1 + \ldots + x_{2n} = 0$ este egal cu $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Să observăm că există o bijecție de la mulțimea șirurilor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ pe mulțimea șirurilor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ care verifică condițiile date, definită prin $f(x) = a$ dacă

$$a_1 = 0,\ a_2 = x_1 = 1,\ a_3 = x_1 + x_2,\ \ldots,\ a_{k+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

pentru $1 \leqslant k \leqslant 2n$, deci $a_{2n+1} = 0$.

3.31. Să considerăm un șir care verifică condițiile problemei și să-i suprimăm toți termenii egali cu n. Se obține un șir cu k termeni unde $0 \leqslant k \leqslant r$ și care satisface condiția impusă. Pentru $i = n$ condiția pusă implică faptul că numărul acestor șiruri este zero pentru $r = n$. Dacă plecăm de la un șir format din numerele $1, \ldots, n-1$, de lungime k, cu proprietatea că cel mult $i-1$ termeni sînt mai mici sau egali cu i pentru $i = 1, \ldots, n-1$, putem insera $r-k$ noi termeni egali cu n și obținem un șir $(x_1, \ldots, x_r)$ cu $1 \leqslant x_i \leqslant n$ care verifică aceeași proprietate.

Dar cei $r-k$ termeni egali cu n pot fi inserați în $\binom{r}{k}$ moduri, ceea ce corespunde celor $\binom{r}{r-k} = \binom{r}{k}$ posibilități de a alege pozițiile ocupate de $r-k$ termeni egali cu n într-un șir format din r termeni.

Plecînd de la toate șirurile formate din numerele $1, \ldots, n-1$ de lungime k pentru $k = 0, \ldots, r$ care verifică proprietatea dată, prin inserarea a $r-k$ termeni egali cu n în toate modurile posibile, obținem fără repetiție toate șirurile $(x_1, \ldots, x_r)$ cu $1 \leqslant x_i \leqslant n$ care verifică aceeași proprietate.
Deci putem scrie recurența:

$$f(n, r) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f(n-1, k) \text{ pentru } 1 \leqslant r \leqslant n-1; \qquad (1)$$

unde $f(n, r)$ reprezintă numărul căutat de șiruri.

Vom arăta că

$$f(n, r) = (n - r)n^{r-1} \qquad (2)$$

prin inducție după n.

Dacă $n = r$ am văzut că $f(n, r) = 0$, ceea ce coincide cu valoarea dată de (2).

Dacă $n > r$ să presupunem că $f(n-1, k) = (n-1-k)(n-1)^{k-1}$ pentru orice $k = 0, \ldots, n-1$.

Ținînd seama de (1) obținem:

$$f(n, r) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f(n-1, k) = \sum_{k=0}^{k} \binom{r}{k} (n-1-k)(n-1)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (n-1)^k - \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} k(n-1)^{k-1} = n^r - r\sum_{k=1}^{r} \binom{r-1}{k-1} (n-1)^{k-1} =$$

$= n^r - rn^{r-1} = (n-r)n^{r-1}$ pentru orice $r = 1, \ldots, n-1$.

Însă pentru $r = n$ am văzut că formula (2) este de asemenea adevărată, deci (2) este adevărată pentru orice $n \geqslant r$.
(H.E. Daniels, Proc. Roy. Soc., A183 (1945), 405—435).

3.32. Dacă notăm $|f^{-1}(1)| = k \geqslant 1$, aceste k elemente pot fi alese în $\binom{n}{k}$ moduri și pentru restul elementelor funcția f poate fi definită în S_{n-k} moduri. Obținem deci recurența:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k} \text{ sau}$$

$$\frac{2S_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{S_{n-k}}{(n-k)!} \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

Deci funcția generatoare exponențială $2s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2S_n}{n!} x^n = 1 +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{S_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = 1 + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m}{m!} x^m \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) =$$

$$= 1 + s(x)e^x, \text{ deci } s(x) = \frac{1}{2 - e^x}.$$

Să dezvoltăm în serie pe $s(x)$:

$$s(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^x/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!},$$

de unde rezultă expresia lui S_n comparînd coeficienții lui x^n din cei doi membri.

3.33. Vom determina mai întîi numărul $U_{n,k}$ al sistemelor ordonate formate din k vectori linear independenți din V. Ca primă componentă a unui astfel de sistem putem alege oricare din cei $q^n - 1$ vectori diferiți de 0 din spațiul V

Orice vector $v \neq 0$ generează un subspațiu de dimensiune egală cu unu, care conține q vectori.

Deci există $q^n - q$ vectori care împreună cu v formează fiecare cîte un sistem de 2 vectori linear independenți și deci fiecare dintre ei poate fi ales ca a doua componentă a sistemului. Fie w unul dintre aceștia. Perechea $\{v, w\}$ generează un subspațiu bidimensional, care conține q^2 vectori. Deci există $q^n - q^2$ vectori liniar independenți de vectorii v și w și oricare dintre ei poate fi ales ca cel de al treilea vector al sistemului. Continuînd astfel obținem:

$$U_{n,k} = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-1}).$$

Fiecare sistem format din k vectori linear independenți generează un subspațiu k - dimensional al lui V. Reciproc, oricare subspațiu k - dimensional are $U_{k,k}$ baze ordonate.

Rezultă

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{U_{n,k}}{U_{k,k}}$$

și formula rezultă simplificînd puterile lui q.

3.34. Proprietățile rezultă printr-un calcul direct. Trecînd la limită pentru $\to 1$ în b) și c) se regăsesc proprietăți binecunoscute ale numerelor binomiale.

3.35. Egalitatea propusă se poate justifica simplu, numărînd în două moduri distincte transformările liniare ale unui spațiu vectorial n - dimensional V_n peste corpul finit $GF(q)$ într-un spațiu liniar Y cu y vectori peste $GF(q)$.

Fie $\{x_1, .., x_n\}$ o bază pentru V_n. Imaginea oricărui x_i poate fi oricare dintre cei y vectori din Y și aceste n imagini determină în mod unic transformarea liniară, deci sînt y^n astfel de transformări.

Vom arăta că membrul drept al identității lui Cauchy numără transformările liniare $f : V_n \to Y$, după dimensiunea subspațiului $\mathrm{Ker}(f)$, format din toți vectorii din V_n a căror imagine este vectorul nul din Y. Conform problemei 3.33 există $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ subspații V_k ale lui V_n, de dimensiune egală cu k.

Fie $z_1, \dots, z_{n-k}, z_{n-k+1}, \dots, z_n$ o bază din V_n, astfel încît $z_{n-k+1}, \dots, z_n$ generează subspațiul V_k.

O transformare liniară $f : V_n \to Y$ are $\mathrm{Ker}(f) = V_k$, dacă și numai dacă ea aplică vectorii $z_{n-k+1}, \dots, z_n$ în vectorul nul din Y și cei $n - k$ vectori rămași $z_1, \dots z_{n-k}$ într-o mulțime liniar independentă de vectori din Y. Deoarece z_1 poate avea ca imagine în Y oricare din cei y vectori, mai puțin vectorul nul, vectorul z_2 poate avea ca imagine oricare din cei y vectori, mai puțin subspațiul liniar cu o dimensiune generat de imaginea lui z_1 etc., găsim $(y - 1)(y - q) \dots (y - q^{n-k+1})$ aplicații liniare $f : V_n \to Y$ care au $\mathrm{Ker}(f) = V_k$ și $\dim(V_k) = k$.

Avem $0 \leqslant k \leqslant n$ și cînd $k = 0$ avem $(y - 1)(y - q) \dots (y - q^{n-1})$ astfel de transformări, iar pentru $k = n$ avem o singură transformare, care aplică toți vectorii din V_n în vectorul nul din Y.

Deci pentru un y fixat are loc egalitatea scrisă. Cum y poate lua o infinitate de valori, rezultă că egalitatea este o identitate polinomială în variabila y. (J. Goldman, G.-C. Rota, Studies in Applied Mathematics, XLIX, 3 (1970), 239—258).

4.1. Dacă presupunem că nu are loc nici i) și nici ii), atunci X conține cel mult a obiecte distincte două cîte două și fiecare dintre acestea sînt prezente în cel mult a copii, deci X are cel mult $a^2 \leqslant n - 1$ obiecte, ceea ce este contradictoriu.

4.2. Cele k linii și k coloane pe care se găsesc turele se pot alege în $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ moduri distincte. La intersecția celor k linii și k coloane se formează o tablă cu k^2 pătrate, pe care cele k ture se pot așeza în $k!$ moduri în poziții care nu se pot ataca reciproc.

Într-adevăr, cele k turnuri se găsesc în k coloane diferite, iar turnul din prima coloană poate fi aranjat în k moduri diferite pe cele k linii, turnul din cea de a II-a coloană poate fi aranjat în $k - 1$ moduri diferite pe cele $k - 1$ linii diferite de linia pe care se găsește turnul din coloana întîia, ș.a.m.d., rezultînd $k!$ posibilități de aranjare.

Deci numărul total de posibilități este egal cu $k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}$.

4.3. Fiecare din cele 19 numere din A aparține uneia din următoarele 18 mulțimi disjuncte două cîte două:

$$\{1\},\ \{52\},\ \{4,\ 100\},\ \{7,\ 97\},\ \{10,\ 94\},\ \ldots,\ \{49,\ 55\}.$$

Deci există doi întregi distincți din A care aparțin uneia din perechile $\{4, 100\}, \ldots, \{49, 55\}$ și care deci au suma egală cu 104.
(Concursul W.L. Putnam din 1978, American Math. Monthly, 9, 86 (1979), 752).

4.4. Să considerăm mulțimea $\{k + 1,\ k + 2,\ \ldots,\ 2k + 1\}$, formată din $k + 1$ numere. Suma oricăror două numere diferite între ele din această mulțime este cuprinsă între $2k + 3$ și $4k + 1$, deci nu este divizibilă prin $2k + 1$. Diferența oricăror două numere este cuprinsă între 1 și k, deci nu este multiplu de $2k + 1$. Dacă notăm numărul căutat prin $n(k)$, deducem că $n(k) \geqslant k + 2$.

Fie A o mulțime formată din $k + 2$ numere întregi. Dacă există două numere din A care dau același rest prin împărțirea la $2k + 1$, rezultă că diferența lor este divizibilă prin $2k + 1$ și A verifică condiția impusă.

În caz contrar, toate cele $k + 2$ resturi ale împărțirii numerelor din A prin $2k + 1$ sînt distincte două cîte două. Deci mulțimea resturilor este o submulțime cu $k + 2$ elemente a mulțimii $\{0, 1, \ldots, 2k\}$. Putem considera că mulțimea resturilor este o submulțime cu $k + 2$ elemente a mulțimii $M = \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$, deoarece orice număr întreg $p = (2k + 1)q + m$, cu q număr întreg și $m \in M$. Însă oricum am alege $k + 2$ numere din M, vor exista două dintre ele cu suma nulă, deoarece în caz contrar ar rezulta $|M| \geqslant 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Deci A conține două numere cu suma divizibilă prin $2k + 1$. Dar $|A| = k + 2$, de unde deducem $n(k) \leqslant k + 2$. Din cele două inegalități de sens contrar se obține $n(k) = k + 2$.

4.5. Sumînd inegalitățile date după $j = 1, \ldots, n$ obținem:

$$|A_i| + \ldots + |A \cap C_i| + \ldots + |C_i| \geqslant n^2.$$

Sumînd după $i = 1, \ldots, n$ obținem în continuare:

$$|M| + 2n \quad C_k \geqslant n^3.$$

Însumînd și după k se deduce $n|M| + 2n|M| \geqslant n^4$, deci $|M| \geqslant n^3/3$.
Dacă $n \equiv 0 \pmod 3$ această margine inferioară poate fi atinsă.
Dacă $|M| = n^3/3$, fie o partiție a lui M:

$M = A_1^1 \cup A_2^1 \cup \ldots \cup A_n^1 \cup A_1^2 \cup \ldots \cup A_n^2 \cup A_1^n \cup A_2^n \cup \ldots \cup A_n^n$, astfel încît $|A_i^j| = n/3$ pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dacă se notează $A_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_j^i$, $B_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_i^j$ și $C_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i-j-1 \pmod n}^j$, partițiile (A_i), (B_i) și (C_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, verifică egalitatea $|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| = n$, deoarece pentru orice i, j, k există relațiile:

$$|A_i \cap B_j| = |A_i \cap C_k| = |B_j \cap C_k| = \frac{n}{3}.$$

Deci în acest caz $\min |M| = n^3/3$ în condițiile date.
(I. Tomescu, E 2582, The American Mathematical Monthly, 3(83), 1976, 197).

4.6. Să arătăm mai întîi că f este idempotentă dacă și numai dacă funcția $g : Y \to Y$, unde $Y = f(X)$ și $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in Y$, este funcția identică.
Într-adevăr, dacă f este idempotentă, obținem: $g(x) = f(x)$ pentru $x \in Y$, deci există $z \in X$ astfel încît $x = f(z)$ și putem scrie:

$$g(x) = f(x) = f(f(z)) = f(z) = x,$$

de unde rezultă că g este funcția identică.
Dacă g este funcția identică, deducem:

$$f(f(x)) = f(y) = g(y) = y = f(x)$$

pentru orice $x \in X$, deci f este idempotentă.
Dacă notăm $|Y| = k$, rezultă $1 \leqslant k \leqslant n$.

Mulțimea $Y \subset X$ poate fi aleasă în $\binom{n}{k}$ moduri, restricția funcției f la Y este funcția identică, iar numărul funcțiilor $h : X \setminus Y \to Y$ este egal cu k^{n-k}. Deoarece f este identică pe Y, rezultă că f este unic determinată de restricția sa h la $X \setminus Y$. Cu aceasta, formula pentru $i(n)$ este justificată.
Se poate arăta că funcția generatoare exponențială a numerelor $i(n)$ este $\exp(xe^x)$.

4.7. Se face demonstrația prin inducție în raport cu m. Pentru $m = 1$ afirmația este imediată. Fie $m \geqslant 2$ și să presupunem că proprietatea are loc pentru $m - 1$, antilanțurile din reuniune fiind disjuncte două cîte două. Fie P o mulțime parțial ordonată care nu conține nici un lanț de cardinal $m + 1$.
Un lanț va fi numit *maximal* dacă mulțimea elementelor sale nu este o submulțime proprie a elementelor unui alt lanț și un element x din S se numește *maximal* dacă $y \leqslant x$ pentru orice element y din S care este comparabil cu x.
Antilanțul M format din toate elementele maximale ale lui P este nevid, deoarece elementul maximal al oricărui lanț maximal face parte din M. Rezultă că mulțimea parțial ordonată $P \setminus M$ nu are lanțuri de cardinal m. Într-adevăr, să presupunem prin reducere la absurd că există în $P \setminus M$ un lanț

$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ de cardinal m. Rezultă că există $z > x_m$ și $z \in M$, deoarece în caz contrar am obține $x_m \in M$, ceea ce contrazice ipoteza că $x_m \in P \setminus M$.

Deci lanțul $x_1 < x_2 < \ldots < x_m < z$ este un lanț de cardinal $m + 1$ în P, ceea ce contrazice ipoteza. Deoarece $P \setminus M$ nu are lanțuri de cardinal m, rezultă din ipoteza de inducție că $P \setminus M$ este o reuniune de $m-1$ antilanțuri disjuncte două cîte două, care împreună cu M ne dau o partiție în m antilanțuri a lui P.

(L. Mirsky, The American Math. Monthly, 8,78(1971), 876—877).

Pentru orice mulțime parțial ordonată P are loc și afirmația duală, cunoscută sub numele de *teorema lui Dilworth*: Numărul minim de lanțuri care partiționează mulțimea P este egal cu numărul maxim de elemente ale unui antilanț.

4.8. Fiecare partiție P_k cu $1 \leqslant k \leqslant n-1$ are k clase și se obține din P_{k+1} prin unificarea a două clase într-o singură clasă.

Deci dacă P_n, P_{n-1}, ..., P_{k+1} sînt fixate, partiția P_k poate fi aleasă în $\binom{k+1}{2}$ moduri.

Numărul lanțurilor de lungime n este egal cu $\prod_{k=1}^{n-1} \binom{k+1}{2} = \frac{(n-1)!\,n!}{2^{n-1}}$.

4.9. Să presupunem prin reducere la absurd că $\bigcap_{i=1}^{s} E_i = \emptyset$. Fie $E_1 = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Deoarece $x_i \notin \bigcap_{i=1}^{s} E_i$, există o mulțime $F_i \in F$ astfel încît $x_i \notin F_i$ pentru $i = 1, \ldots, r$. Obținem $E_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_r = \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza. Într-adevăr, dacă de exemplu $x_j \in E_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_r$, atunci $x_j \in E_1$ și $x_j \in F_j$, însă prin construcție $x_j \notin F_j$.

4.10. Dacă definim familia $S_1 = (X \setminus X_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, toate mulțimile din S_1 sînt distincte două cîte două și diferite de mulțimile din S. Într-adevăr, dacă există un indice i astfel încît $X \setminus X_i \in S$ și $X_i \in S$ atunci $(X \setminus X_i) \cap X_i = \emptyset$, ceea ce contrazice definiția familiei S. Deci deducem $2r \leqslant |P(X)| = 2^n$ sau $r \leqslant 2^{n-1}$, deci $\max r \leqslant 2^{n-1}$. Această margine superioară este atinsă dacă definim $Y = X \setminus \{x\}$ pentru un element $x \in X$ și S este familia de mulțimi $\{Y_i \cup \{x\} \mid Y_i \subset Y\}$. În acest caz $|S| = |P(Y)| = 2^{n-1}$ și pentru orice $A, B \in S$ avem $A \cap B \neq \emptyset$, deoarece $x \in A$ și $x \in B$, deci $x \in A \cap B$.

(G. Katona, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 15(1964), 329—337).

4.11. Dacă fixăm submulțimea $C \in F$, funcția

$$f : F \to P(X)$$

definită prin $f(A) = A \,\Delta\, C$ este injectivă.

Într-adevăr, dacă $A_1 \,\Delta\, C = A_2 \,\Delta\, C$, din proprietățile diferenței simetrice se deduce că:

$$A_1 = (A_1 \,\Delta\, C) \,\Delta\, C = (A_2 \,\Delta\, C) \,\Delta\, C = A_2, \text{ deci } A_1 = A_2.$$

Rezultă că numărul mulțimilor de forma $A \,\Delta\, C$, unde A parcurge familia F, este cel puțin egal cu $|F| = m$.

4.12. Fie $S = \{1, ..., n\}$ și să notăm prin A_i mulțimea familiilor de submulțimi nevide, distincte două cîte două ale lui S, care nu conțin elementul $i \in S$. Deoarece numărul familiilor formate din submulțimi nevide și distincte două cîte două ale lui S este egal cu 2^{2^n-1}, rezultă că

$$A(n) = 2^{2^n-1} - |A_1 \cup ... \cup A_n|.$$

Aplicînd principiul includerii și al excluderii, obținem $|A_1 \cup ... \cup A_n| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + ...$$

Deoarece $\left|\bigcap_{i \in K} A_i\right| = 2^{2^{n-k}-1}$, unde $|K| = k$, formula pentru $A(n)$ se deduce imediat, deoarece mulțimea K poate fi aleasă în $\binom{n}{k}$ moduri ca submulțime a lui S.

(L. Comtet, C.R. Acad. Sci. Paris, A262, 1966, 1091—1094).

4.13. Fie $A = (S_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ o acoperire ireductibilă a mulțimii S. Din definiția dată, rezultă că fiecare submulțime S_i conține o submulțime nevidă T_i a lui S, formată din elemente care nu mai aparțin celorlalte mulțimi ale acoperirii.

Să notăm $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$. Rezultă că submulțimile $T_1, ..., T_k$ realizează o partiție a mulțimii T. Dacă $|T| = i$ obținem $k \leqslant i \leqslant n$ și toate acoperirile ireductibile ale lui S se obțin fără repetiție în modul următor pentru fiecare i: Pentru fiecare din cele $\binom{n}{i}$ alegeri ale lui T ca submulțime a lui S, se formează toate cele $S(i, k)$ partiții $T_1 \cup ... \cup T_k$ ale lui T. Fiecare din cele $n - i$ elemente rămase aparține unei familii de mulțimi dintre $T_1, ..., T_k$ care conține cel puțin două mulțimi, deci acest număr de posibilități este egal cu $2^k - \binom{k}{1} - \binom{k}{0} = 2^k - k - 1$, de unde rezultă formula pentru $I(n, k)$.

Expresia lui $I(n, n-1)$ se deduce ținînd seama că $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

Pentru a obține expresia lui $I(n, 2)$, fie $y \notin S$. Există o bijecție de la mulțimea partițiilor lui $S \cup \{y\}$ pe mulțimea acoperirilor ireductibile cu 2 mulțimi ale lui S, definită astfel:

Partiției $S \cup \{y\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ i se asociază acoperirea ireductibilă a lui S ale cărei mulțimi sînt: $S_1 \cup (S_3 \setminus \{y\})$ și $S_2 \cup (S_3 \setminus \{y\})$, dacă S_3 este clasa partiției care îl conține pe y. Deci $I(n, 2) = S(n+1, 3)$.

(T. Hearne, C. Wagner, Discrete Mathematics, 5(1973), 247—251).

4.14. Fie t cel mai mic întreg pentru care $\left[\frac{t^2}{4}\right] > n$. Se consideră următoarele $[t^2/4]$ mulțimi formate din numere naturale:

$$A_{i,j} = \{x \mid i \leqslant x \leqslant j\}, \text{ unde } 1 \leqslant i \leqslant \frac{t}{2} < j \leqslant t.$$

Se notează prin A_{i_k, j_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$ o subfamilie F a acestei familii de mulțimi, care nu conține reuniunile de mulțimi. Vom eticheta numărul i_k (sau j_k)

dacă nu există o altă mulțime A_{i_s,j_s} din această familie cu m mulțimi F cu proprietatea că $i_k = i_s$ și $j_s < j_k$ (sau $j_k = j_s$ și $i_s < i_k$).

Cel puțin una dintre extremitățile i_k și j_k ale lui A_{i_k,j_k} trebuie să fie etichetate, deoarece în caz contrar A_{i_k,j_k} ar fi reuniunea a două mulțimi din F, ceea ce contrazice ipoteza. Un întreg etichetat fiind extremitate pentru o singură mulțime A_{i_k,j_k}, rezultă $m \leqslant t$, deci $f(n) \leqslant f([t^2/4]) \leqslant t$ sau $f(n) \leqslant 2\sqrt{n} + 1$.

Pentru a obține marginea inferioară, fie $\{A_1, ..., A_n\}$ o familie oarecare formată din n mulțimi distincte. Vom construi o subfamilie $\{A_{i_1}, ..., A_{i_r}\}$ care nu conține reuniunile de mulțimi în modul următor: A_{i_1} este orice mulțime A_i minimală, adică nu conține nici o altă mulțime ca o submulțime proprie.

Dacă am ales mulțimile $A_{i_1}, ..., A_{i_s}$, vom alege mulțimea $A_{i_{s+1}}$ ca fiind o mulțime minimală dintre mulțimile din familia $\{A_1, ..., A_n\} \setminus \{A_{i_1}, ..., A_{i_s}\}$, care nu este reuniunea a două mulțimi distincte din familia $\{A_{i_1}, ..., A_{i_s}\}$. Există o astfel de alegere pentru $A_{i_{s+1}}$ dacă $n - s > \frac{s(s-1)}{2}$, deoarece există $\binom{s}{2}$ reuniuni de cîte două mulțimi distincte din familia $\{A_{i_1}, ..., A_{i_s}\}$. Această construcție definește o subfamilie $\{A_{i_1}, ..., A_{i_r}\}$ formată din r mulțimi, unde $r + \frac{r(r-1)}{2} \geqslant n$, adică $r \geqslant \sqrt{2n} - 1$.

Egalitatea $A_i \cup A_j = A_k$ unde $i, j, k \in \{i_1, ..., i_r\}$ și sînt distincți doi cîte doi este imposibilă, deci familia $\{A_{i_1}, ..., A_{i_r}\}$ nu conține reuniunile de mulțimi. Într-adevăr, dacă A_k a fost selectată după A_i și A_j, acest lucru ar contrazice construcția făcută și în caz contrar rezultă că A_k nu este minimală în momentul cînd este selectată, ceea ce contrazice modul de definire a familiei $\{A_{i_1}, ..., A_{i_r}\}$.

(P. Erdös, S. Shelah, Graph Theory and Applications, Proceedings of the Conference at Western Michigan University, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1972).

4.15. Pentru orice $x \in S$ vom nota $M(x) = \{i \mid x \in A_i\}$ și vom arăta că pentru orice submulțime $T \subset \{1, 2, ..., n\}$ cu $|T| = n - k + 1$ elemente, există $x \in S$, astfel încît $M(x) = T$. Într-adevăr, $\bigcup_{i \in T} A_i$ fiind o reuniune a $k - 1$ mulțimi din familia dată, rezultă că există un element $x \in S$ care nu aparține acestei reuniuni. Vom arăta că $M(x) = T$. Prin construcție avem $M(x) \subset T$. Dacă $M(x)$ este o submulțime proprie a lui T, rezultă $|M(x)| \leqslant n - k$. Deci există k mulțimi care nu conțin elementul x, ceea ce contrazice ipoteza că oricare reuniune a k mulțimi din această familie este egală cu S. Rezultă că $M(x) = T$, deci aplicația care asociază fiecărui element $x \in S$ submulțimea $M(x)$ admite o restricție surjectivă definită pe $U \subset S$, cu valori în mulțimea $P_{n-k+1}(\{1, ..., n\})$.

Obținem $|S| \geqslant |U| \geqslant \binom{n}{n-k+1} = \binom{n}{k-1}$.

Dacă $|S| = \binom{n}{k-1}$, ținînd seama de ipoteză, obținem $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = n|A_i| =$

$= (n - k + 1) | S | = (n - k + 1) \binom{n}{k-1}$, de unde deducem $| A_i | = \frac{n-k+1}{n} \binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$, deoarece în acest caz avem $| M(x) | = n - k + 1$ pentru orice $x \in S$.

4.16. Fie m_0 cel mai mic număr natural m cu proprietatea menționată în enunț. Să notăm $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = Y$.

Deoarece $| X_i | = h$ pentru $1 \leqslant i \leqslant k$ și $X_i \subset Y$, rezultă $k \leqslant \binom{| Y |}{h}$, deci $m_0 \leqslant | Y |$ sau $m_0 \leqslant \min | Y |$.
Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $Y \subset X$ cu $| Y | = m_0$. Deoarece $\binom{m_0}{h} \geqslant k$, putem alege k submulțimi $X_1, \ldots, X_k$ cu cîte h elemente, astfel încît $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = Y$. Într-adevăr, această proprietate rezultă din inegalitatea $m_0 \leqslant kh$. Pentru a justifica această inegalitate, să presupunem prin reducere la absurd că $m_0 > kh$. Deoarece $\binom{m_0 - 1}{h} < k$ din definiția lui m_0, din $m_0 \geqslant kh + 1$ deducem însă $\binom{m_0 - 1}{h} \geqslant \binom{kh}{h} \geqslant k$, deci am ajuns la o contradicție și inegalitatea $m_0 \leqslant kh$ este justificată. Prin construcție $\left| \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right| = | Y | = m_0$, deci $\min \left| \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right| \leqslant m_0$ și egalitatea este demonstrată.

4.17. Fie $Y \subset X$ cu $| Y | = p$. Y poate fi scris ca reuniune a k mulțimi, $Y = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ în $(2^k - 1)^p$ moduri diferite. Într-adevăr, fiecare dintre cele p elemente ale lui Y poate aparține unui număr de $2^k - 1$ familii nevide de submulțimi $A_1, \ldots, A_k$.
Deoarece Y poate fi aleasă în $\binom{n}{p}$ moduri diferite, rezultă că $\Sigma | A_1 \cup \ldots \cup A_k | = \sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} (2^k - 1)^p = n(2^k - 1) \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} (2^k - 1)^{p-1} = n(2^k - 1)2^{k(n-1)}$.

4.18. Ținînd seama de problema anterioară, trebuie să mai arătăm că $\Sigma | A_1 \cap \ldots \cap A_k | = n2^{k(n-1)}$, dacă $| X | = n$. Deoarece operația de trecere la complementară:

$$C(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = CA_1 \cap \ldots \cap CA_k$$

stabilește o bijecție între familia mulțimilor de forma $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ și familia mulțimilor de forma $A_1 \cap \ldots \cap A_k$, iar $| CA_1 \cap \ldots \cap CA_k | = n - | A_1 \cup \ldots \cup A_k |$, putem scrie:
$\Sigma | A_1 \cap \ldots \cap A_k | = \Sigma(n - | A_1 \cup \ldots \cup A_k |) = n2^{nk} - n(2^k - 1)2^{k(n-1)} = n2^{k(n-1)}$, adică ceea ce trebuia arătat. S-a ținut seama că fiecare din sumele scrise conține 2^{nk} termeni, fiecare din mulțimile $A_1, \ldots, A_k$ putînd fi aleasă dintre submulțimile lui X în 2^n moduri.
(I. Tomescu, E 2764, American Math. Monthly, 86(1979), 223).

4.19. Dacă o bază de filtru S conține mulțimile $A_1, A_2, ..., A_p$, rezultă că există $B_1 \in S$ astfel încît $B_1 \subset A_1 \cap A_2$. La fel există $B_2 \in S$ astfel încît $B_2 \subset B_1 \cap A_3$ și așa mai departe. Obținem $B_{p-1} \in S$ astfel încît $B_{p-1} \subset B_{p-2} \cap A_p$ și $B_i \subset A_{i+1}$ pentru $i = 1, ..., p-1$; în plus $B_1 \subset A_1$. Deoarece prin construcție avem:

$$B_{p-1} \subset B_{p-2} \subset ... \subset B_2 \subset B_1,$$

rezultă că există o mulțime $B = B_{p-1} \in S$ astfel încît $B \subset A_i$ pentru $i = 1, ..., p$.
Deci orice bază de filtru S are următoarea formă: există $B \subset X$, $B \neq \emptyset$ astfel încît

$$S = \{B,\ B \cup C_1,\ ...,\ B \cup C_s\} \tag{1}$$

unde $C_1, ..., C_s$ sînt submulțimi nevide și diferite două cîte două ale mulțimii $X \setminus B$. Dacă notăm $| X \setminus B | = k$ rezultă $0 \leqslant k \leqslant n-1$ deoarece, $B \neq \emptyset$.
Pentru că $\{C_1, ..., C_s\}$ este o familie de submulțimi nevide ale lui $X \setminus B$, deducem $0 \leqslant s \leqslant 2^k - 1$.
Avem $| B | = n - k$, deci mulțimea B poate fi aleasă în $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ moduri diferite. Pentru fiecare alegere a lui B, familia de submulțimi $\{C_1, ..., C_s\}$ ale lui $X \setminus B$, care poate fi eventual vidă (pentru $s = 0$), poate fi aleasă într-un număr de moduri egal cu numărul de submulțimi ale unei mulțimi cu $2^k - 1$ elemente, adică cu

$$2^{2^k-1}$$

deoarece mulțimea $X \setminus B$ conține $2^k - 1$ submulțimi nevide. Rezultă că numărul de moduri în care poate fi aleasă baza de filtru S de forma (1) pentru $| B | = n - k$ este egal cu

$$\binom{n}{k} 2^{2^k-1}.$$

Însumînd aceste numere pentru $k = 0, ..., n-1$ obținem numărul bazelor de filtru ale unei mulțimi cu n elemente.

4.20. Dacă notăm cu X reuniunea tuturor elementelor din mulțimile A_i și B_j, unde $1 \leqslant i, j \leqslant m$, fie $| X | = n$ și $(x_{p(1)}, ..., x_{p(n)})$ o permutare oarecare a elementelor din $X = \{x_1, ..., x_n\}$.
Există cel mult un indice i pentru care fiecare element din mulțimea A_i are un indice mai mic decît fiecare element din mulțimea B_i. Într-adevăr, presupunînd contrariul, fie doi indici $i \neq j$ astfel încît fiecare element din A_i să aibă un indice mai mic decît fiecare element din B_i și fiecare element din A_j să aibă un indice mai mic decît fiecare element din B_j. Conform ipotezei, există un element $x_{p(k)} \in B_1 \cap A_2$ și un element $x_{p(r)} \in B_2 \cap A_1$. Deoarece $x_{p(r)} \in A_1$ și $x_{p(k)} \in B_1$ rezultă că $p(r) < p(k)$. Însă $x_{p(r)} \in B_2$ și $x_{p(k)} \in A_2$, deci $p(r) > p(k)$, ceea ce este absurd.
Deci există cel mult $n!$ perechi (A_i, B_i) cu proprietatea enunțată. Dacă i este un indice fixat, numărul permutărilor indicilor $1, ..., n$ ai elementelor din X pentru care fiecare element din A_i are un indice mai mic decît orice element din B_i este egal cu:

$$\binom{n}{p+q} p!q!(n-p-q)! = \frac{n!}{\binom{p+q}{p}}.$$

Într-adevăr, putem alege cele $p + q$ elemente din $A_i \cup B_i$ în $\binom{n}{p+q}$ moduri, apoi primele p elemente în ordinea crescătoare a indicilor le atribuim mulțimii A_i și restul de q elemente cu indici mai mari decît elementele din A_i le atribuim mulțimii B_i. Permutăm apoi indicii elementelor din A_i în $p!$ moduri, indicii elementelor din B_i în $q!$ moduri și indicii elementelor rămase în $(n - p - q)!$ moduri, obținînd în acest fel toate permutările mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ cu proprietatea că fiecare element din A_i are un indice mai mic decît fiecare element din B_i.

Deci fiecare pereche (A_i, B_i) este calculată de $n! / \binom{p+q}{p}$ ori relativ la toate permutările indicilor pentru care fiecare element din A_i are un indice mai mic decît fiecare element din B_i. Deci numărul m al perechilor (A_i, B_i) verifică inegalitatea: $m \leqslant n! \Big/ \frac{n!}{\binom{p+q}{p}} = \binom{p+q}{p}$.

4.21. Un lanț de lungime n format cu submulțimi ale lui X este un șir de mulțimi:

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset X$$

astfel încît $|M_i| = i$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.
Numărul lanțurilor de lungime n care se pot forma cu elementele mulțimii X este egal cu $n!$.
Dacă $|A| = r$, numărul lanțurilor de lungime n care conțin mulțimea A, de forma:

$$M_1 \subset \ldots \subset M_{r-1} \subset A \subset M_{r+1} \subset \ldots \subset X$$

este egal cu $r!(n-r)!$.
Dacă A_i și A_j sînt incomparabile în raport cu incluziunea, rezultă că orice lanț care conține pe A_i este diferit de orice lanț care îl conține pe A_j. Deci putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{p} n_i!(n - n_i)! \leqslant n!$$

unde am notat $|A_i| = n_i$. Dar aceasta ne conduce la:

$$\frac{p}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\binom{n}{n_i}} \leqslant 1,$$

deoarece $\max_{n_i} \binom{n}{n_i} = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Rezultă că $\max p \leqslant \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Mai obținem și inegalitatea contrară, considerînd G familia submulțimilor cu $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ elemente ale lui X.

Această demonstrație a fost propusă de D. Lubell (J. Comb. Theory, 1(1966), 299).

4.22. Fie $\pi = (x_1, \ldots, x_n)$ o permutare ciclică a mulțimii X. Vom considera un ciclu C cu n laturi și vom asocia literele $x_1, \ldots, x_n$ cu laturile lui C (în aceeași ordine ciclică). Dacă o submulțime A a lui X cu r elemente conține elemente consecutive în permutarea π, ea corespunde unui sublanț al ciclului C de lungime r.

Conform condiției 2), sublanțurile care corespund mulțimilor $A_1, \ldots, A_p$ au două cîte două cel puțin o muchie în comun. Fie x un vîrf al lui C. Notînd sublanțurile cu aceleași simboluri cu submulțimile corespunzătoare cu r elemente ale lui X, rezultă că x este un vîrf terminal pentru cel mult un lanț A_i. Într-adevăr, dacă A_i și A_j au un vîrf terminal comun și $i \neq j$, deci sînt distincte, ele trebuie să pornească din x în sensuri diferite pe ciclul C. Deoarece $n \geqslant 2r$ aceste lanțuri sînt disjuncte relativ la laturi, ceea ce contrazice ipoteza. Acum, deoarece fiecare lanț A_j ($j = 2, \ldots, p$) are cel puțin o muchie în comun cu A_1, unul din punctele terminale ale lui A_j este un punct interior al lui A_1. Deoarece două lanțuri distincte nu au un punct terminal comun, rezultă că există cel mult $r - 1$ lanțuri A_j cu $2 \leqslant j \leqslant p$, deci $p - 1 \leqslant r - 1$ sau $p \leqslant r$.

În concluzie, pentru orice permutare ciclică π a lui X, există cel mult r submulțimi cu r elemente ale lui X, care constau din vîrfuri consecutive relativ la π și care verifică 2). Deoarece există $(n-1)!$ permutări ciclice ale lui X, în acest mod nu obținem mai mult de $r(n-1)!$ submulțimi cu r elemente ale lui X.

Pentru a preciza o permutare ciclică pentru care A cu $|A| = r$ constă din elemente consecutive, trebuie să ordonăm mulțimile A și $X \setminus A$. Deoarece $|A| = r$, rezultă că fiecare mulțime A este numărată de $r!(n-r)!$ ori. Deci numărul mulțimilor A_i este $p \leqslant \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}$. Pentru a arăta că $\max p \geqslant \binom{n-1}{r-1}$ vom considera submulțimile cu r elemente ale lui X care conțin un element fixat $x_1 \in X$, al căror număr este egal cu $\binom{n-1}{r-1}$.

Această demonstrație a fost propusă de G.O.H. Katona (J. Comb. Theory, 13(1972), 183—184).

4.23. Fie $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Vom colora aceste elemente cu una din culorile a sau b, astfel încît nici o mulțime E_i să nu fie monocromatică. Să colorăm elementul x_1 cu culoarea a.

Presupunînd că am colorat elementele $x_1, \ldots, x_i$ cu $1 < i < n$ cu culorile a sau b astfel încît să nu apară nici o mulțime E_k monocromatică, să considerăm cazul cînd acest proces nu mai poate continua. Deci nu putem colora elementul x_{i+1} cu culoarea a, deoarece există o mulțime $E \subset \{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ cu $x_{i+1} \in E$ care are toate elementele diferite de x_{i+1} colorate cu culoarea a. Elementul x_{i+1} nu poate fi colorat nici cu culoarea b, deci există o mulțime $F \subset \{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ cu $x_{i+1} \in F$, care are toate elementele diferite de x_{i+1} colorate cu culoarea b. Obținem că E, F sînt două mulțimi distincte dintre $E_1, \ldots, E_m$ și $E \cap F = \{x_{i+1}\}$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci putem colora elementul x_{i+1} cu culoarea a sau cu culoarea b, astfel încît să nu apară mulțimi E_k monocromatice.

Am demonstrat astfel prin inducție că acest proces de colorare poate continua pînă cînd reușim să colorăm toate elementele din X cu 2 culori, astfel încît să nu apară nici o mulțime monocromatică.

4.24. Să colorăm elementele din X în mod aleator cu roșu și cu albastru, colorările fiind independente una de alta și fiecare culoare avînd probabilitatea $\frac{1}{2}$. Să notăm cu A_i evenimentul care constă în colorarea tuturor elementelor din E_i cu o singură culoare. Avem $P(A_i) = \frac{1}{2^{r-1}}$ pentru orice $i = 1, ..., n$ deoarece există 2^r moduri de a colora cu 2 culori elementele din E_i și dintre acestea, numai două conduc la colorări monocromatice. Deci probabilitatea ca o colorare aleatoare să conțină o submulțime monocromatică este egală cu

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) < \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n}{2^{r-1}} \leqslant 1.$$

Am scris prima inegalitate strictă, deoarece evenimentele $A_1, ..., A_n$ nu sînt independente; ele au loc împreună cînd toate elementele lui X au o aceeași culoare.
Deci probabilitatea evenimentului contrar este strict pozitivă, ceea ce demonstrează existența unei colorări cu proprietatea cerută.

4.25. Vom demonstra că dacă $n \geqslant 3$ și dacă familia F de submulțimi cu trei elemente ale lui M are proprietatea că pentru oricare două mulțimi distincte $A, B \in F$ avem $|A \cap B| = 0$ sau $|A \cap B| = 2$, atunci $|F| \leqslant n$, ceea ce va demonstra proprietatea. Să presupunem deci că F conține numai mulțimi cu trei elemente care sînt două cîte două fie disjuncte, fie cu exact două elemente comune.
Să considerăm deci $A, B \in F$ astfel încît $A \cap B = \{a, b\}$ și $A = \{a, b, c,\}$ iar $B = \{a, b, d\}$.
Vom considera două cazuri:
I. Elementul c aparține unei alte mulțimi $C \in F$. Mulțimea C nu poate conține un singur element în comun cu A, deci C conține unul din elementele a sau b. Dar C nu poate conține un singur element în comun cu B, deci $d \in C$. Rezultă că $C \subset A \cup B$. Vom arăta că dacă elementele a, b sau d mai aparțin unor mulțimi din F diferite de A, B și C, atunci acestea sînt incluse în $A \cup B$. Dacă elementul d este în această situație obținem în mod analog ca pentru c o aceeași concluzie.
Să presupunem de exemplu că $a \in C$. Dacă $a \in D$ și $D \in F$, din condiția ca $|D \cap A| = |D \cap B| = |D \cap C| = 2$, care apare deoarece $\{a\} = A \cap B \cap C \cap D$, se deduce că D este una dintre mulțimile A, B sau C. Dacă însă $b \in D$, deoarece $b \in A \cap B$, se deduce că D și A au două elemente comune și D și B au două elemente comune. Unul din aceste elemente comune aparține și lui C, deci și D și C au două elemente comune. Rezultă că dacă D este distinct de A, B și C, trebuie ca $D = \{b, c, d\} \subset A \cup B$.
Pe de altă parte, fiind dată o submulțime cu patru elemente, toate submulțimile sale cu trei elemente, în număr de patru, verifică proprietatea că intersecția oricăror două este formată din exact două elemente.
II. Elementul a aparține unei alte mulțimi $C \in F$. Dacă C mai conține unul din elementele c sau d, obținem ca mai înainte $C \subset A \cup B$ și regăsim cazul I. În caz contrar rezultă $b \in C$ și C mai conține un element $x_1 \neq c, d$. În acest caz elementele c și d nu mai aparțin nici unei mulțimi din familia F. Într-adevăr, dacă presupunem de exemplu că $c \in D$ și $D \neq A, B, C$, rezultă că de exemplu $a \in D$. Apoi $d \in D$ și $x_1 \in D$, ceea ce este absurd deoarece $|D| = 3$.

Dacă unul din elementele a sau b aparține unei alte mulțimi $D \in F$, rezultă că D nu conține nici unul din elementele c sau d.
Rezultă că D conține ambele elemente a și b și un alt element $x_2 \neq x_1$.
Din aceste observații se deduce structura familiei F de submulțimi cu trei elemente ale lui M, care au două cîte două o intersecție formată din zero sau două elemente:
Familia F poate conține trei tipuri de mulțimi:
a) submulțimi cu trei elemente care nu au elemente comune cu nici o altă submulțime din F;
b) două submulțimi A și B astfel încît $A \cap B = \{a, b\}$ și eventuale submulțimi $C_1 = \{a, b, x_1\}$, $C_2 = \{a, b, x_2\}$, ...
c) două submulțimi A și B astfel încît $|A \cap B| = 2$ și cel mult alte două submulțimi cu trei elemente incluse în $A \cup B$, iar orice mulțime de la b) este disjunctă de orice mulțime de la c). De aici se deduce cu ușurință cardinalul maxim al familiei F ca o funcție de n. Să notăm $\max |F| = f(n)$. Astfel, dacă $n = 4k$, obținem $f(n) = n$ și acest maxim se atinge cînd F se obține plecîndu-se de la o partiție a lui M cu $\frac{n}{4}$ clase a cîte patru elemente, considerînd toate cele patru submulțimi cu cîte trei elemente ale fiecărei clase.
Pentru $n = 4k + 1$ obținem $f(n) = n - 1$ și acest maxim se atinge aplicînd construcția anterioară mulțimii $M \setminus \{x\}$, unde x este un element oarecare al lui M și numai în acest caz.
Pentru $n = 4k + 2$ obținem $f(n) = n - 2$ și acest maxim se atinge numai în următoarele cazuri:
1) Aplicînd construcția de la cazul cînd n este multiplu de patru mulțimii $M \setminus \{x, y\}$, unde x, y sînt două elemente oarecare distincte din M;
2) F conține $n - 2$ submulțimi de tipul b):

$$C_1 = \{a, b, x_1\},\ C_2 = \{a, b, x_2\},\ \ldots,\ C_{n-2} = \{a, b, x_{n-2}\}.$$

Pentru $n = 4k + 3$ obținem de asemenea $f(n) = n - 2$ și acest maxim se atinge numai în următoarele două cazuri:
3) Aplicînd construcția de la cazul cînd n este multiplu de patru mulțimii $M \setminus \{x, y, z\}$, unde x, y, z sînt trei elemente oarecare distincte din M și apoi adăugînd la familia F astfel obținută mulțimea $\{x, y, z\}$; 4) F conține $n - 2$ submulțimi de tipul b), analog cu cazul 2). Deoarece $f(n) \leqslant n$ pentru orice $n \geqslant 3$, proprietatea este demonstrată. S-a considerat $n \geqslant 5$ în enunț pentru ca să existe $n + 1$ submulțimi cu trei elemente, distincte două cîte două. Se mai observă că limita $n + 1$ poate fi coborîtă la n, respectiv $n - 1$, cînd $n \equiv 1 \pmod 4$, respectiv $n \equiv 2$ sau $n \equiv 3 \pmod 4$.

4.26. Putem presupune că $a_i,\ b_i \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$, deoarece adunînd orice constantă cu toate numerele a_i și b_i condițiile problemei rămîn în continuare verificate. Să definim polinoamele:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i};\quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}.$$

Obținem:

$$f^2(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j} = f(x^2) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j};$$

$$g^2(x) = g(x^2) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j}.$$

Deci $f^2(x) - g^2(x) = f(x^2) - g(x^2)$ sau

$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - f(x)}$, iar polinomul $f(x) - g(x)$ nu este polinomul nul, deoarece $\{a_1, \ldots, a_n\} \neq \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Deoarece $f(1) = g(1) = n$, putem scrie:

$$f(x) - g(x) = (x - 1)^k p(x),$$

unde $k \geqslant 1$ și $p(1) \neq 0$.

Deci $f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = (x + 1)^k \frac{p(x^2)}{p(x)}$, de unde făcînd $x = 1$ obținem:

$$2n = f(1) + g(1) = (1 + 1)^k = 2^k \text{ sau } n = 2^{k-1}.$$

Dacă n este o putere a lui 2, un exemplu de colecții care satisfac condițiile impuse se poate construi astfel:

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ este formată din $\binom{k+1}{2p}$ copii ale întregului $2p$ pentru $0 \leqslant p \leqslant \frac{k+1}{2}$, iar $\{b_1, \ldots, b_n\}$ este formată din $\binom{k+1}{2p+1}$ copii ale întregului $2p + 1$ pentru $0 \leqslant p \leqslant \frac{k}{2}$, dacă $n = 2^k$. Pentru $k = 2$ cele două colecții sînt $\{0, 2, 2, 2\}$, respectiv $\{1, 1, 1, 3\}$.

(J. Selfridge, E.G. Straus, Pacific J. Math., 8(1958), 847—856).

4.27. Dacă $\emptyset \in F$, este clar că $F = \{\emptyset\}$, $m = 1$ și deci $m \leqslant n$. Dacă $X \in F$ atunci se poate ca $F = \{X\}$ și $m = 1$, deci $m \leqslant n$. În caz contrar rezultă $m = 2$, $A_1 = X$ și $A_2 = \{x\}$, unde $x \in X$ și $n = |X| \geqslant 2$ pentru ca să avem $A_1 \neq A_2$. Rezultă că $m \leqslant n$.

Să considerăm acum cazul cînd $\emptyset$ și X nu fac parte din familia F. Dacă toate mulțimile $A_1, \ldots, A_m$ au un element x comun, rezultă că mulțimile $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_m \setminus \{x\}$ sînt disjuncte două cîte două și ele sînt submulțimi ale mulțimii $X \setminus \{x\}$, care are $n-1$ elemente. Este clar că numărul maxim de submulțimi disjuncte două cîte două ale unei mulțimi $Y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ este egal cu n și el se atinge pentru următoarele mulțimi: $\emptyset, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-1}\}$. Deci în acest caz obținem din nou $m \leqslant n$.

În caz contrar, pentru orice $x \in X$ există o mulțime $A \in F$ care nu conține elementul x. Să notăm cu $d(x)$ numărul mulțimilor din familia F care conțin elementul x.

Dacă $x \in X$, fie $A \in F$ o mulțime cu proprietatea că $x \notin A$ și fie $A_1, \ldots, A_d$ cu $d = d(x)$ mulțimile care îl conțin pe x. Conform ipotezei, $A_1, \ldots, A_d$ au cîte un element în comun cu A. Fie aceste elemente $x_1, \ldots, x_d$. Dacă de exemplu $x_i = x_j$, unde $1 \leqslant i, j \leqslant d$ și $i \neq j$ atunci obținem că $\{x, x_i\} \subset A_i \cap A_j$. Avem $x \neq x_i$ deoarece $x \notin A$ și $x_i \in A$, deci $|A_i \cap A_j| \geqslant 2$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci elementele $x_1, \ldots, x_d$ sînt distincte două cîte două. Deoarece $\{x_1, \ldots, x_d\} \subset A$ rezultă $|A| \geqslant d = d(x)$.

Să presupunem acum prin reducere la absurd că $m > n$. Rezultă că $m - d(x) > n - d(x) \geqslant n - |A|$ pentru fiecare pereche (x, A) cu proprietatea că $x \notin A$, deci:

$$\frac{d(x)}{m - d(x)} < \frac{|A|}{n - |A|}, \tag{1}$$

deoarece $0 < |A| < n$. Să însumăm acum inegalitățile (1) pentru fiecare pereche (x, A) cu $x \notin A$.

Am presupus că pentru orice $x \in X$ există o mulțime $A \in F$ cu proprietatea că $x \notin A$, deci fiecare element $x \in X$ apare cel puțin într-o pereche (x, A). La fel pentru orice $A \in F$ există un element $x \in X \setminus A \neq \emptyset$ cu proprietatea că $x \notin A$, deci fiecare mulțime $A \in F$ apare cel puțin într-o pereche (x, A).

Dacă fixăm elementul $x \in X$ există exact $m - d(x)$ mulțimi A cu proprietatea că $x \notin A$. Dacă fixăm mulțimea A, există exact $n - |A|$ elemente x cu proprietatea că $x \notin A$. Deci însumînd inegalitățile (1) pentru toate perechile (x, A) cu $x \notin A$ și grupînd termenii egali între ei, obținem:

$$\sum_{x \in X} (m - d(x)) \frac{d(x)}{m - d(x)} < \sum_{A \in F} (n - |A|) \frac{|A|}{n - |A|},$$

adică:

$$\sum_{x \in X} d(x) < \sum_{A \in F} |A|. \tag{2}$$

Însă între cei doi membri ai inegalității (2) avem egalitate, din modul de definiție a lui $d(x)$, ceea ce este contradictoriu. Deci presupunerea că $m > n$ este falsă, ceea ce demonstrează că $m \leqslant n$.

(P. Crawley, R.P. Dilworth, Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, 1973).

4.28. Să notăm prin $\{p_1, \ldots, p_n\}$ mulțimea celor n puncte din plan. Fie a_i numărul punctelor care se găsesc la o distanță egală cu 1 de punctul p_i pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

Rezultă că numărul căutat de perechi va fi egal cu $m = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/2$.

Să notăm cu C_i cercul cu centrul în punctul p_i și raza egală cu unitatea. Oricare două astfel de cercuri au cel mult două puncte de intersecție, deci numărînd pentru fiecare pereche de cercuri cele zero, unu sau două puncte de intersecție și adunînd numerele astfel obținute, găsim o sumă majorată de $2\binom{n}{2} = n(n-1)$.

Este clar că putem considera numai cazul cînd fiecare număr a_i este cel puțin egal cu 1. Deoarece fiecare punct p_i este o intersecție pentru exact $\binom{a_i}{2}$ perechi de astfel de cercuri, putem scrie:

$$n(n-1) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - m.$$

Conform inegalității lui Cauchy-Schwarz, deducem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

deci ținînd seama de inegalitatea precedentă se obține:

$4m^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n(2n(n-1) + 2m)$, sau $4m^2 - 2nm - 2n^2(n-1) \leqslant 0$.

Deci $m \leqslant (n + \sqrt{8n^3 - 7n^2})/4 < n\sqrt{n}$ pentru orice $n \geqslant 1$, inegalitate care este imediată, deoarece este echivalentă cu $n > \sqrt{n} - 1$.

(Concursul W.L. Putnam din 1978, American Math. Monthly, 86, 9 (1979), 752)

4.29. Fiecare dreaptă de intersecție este determinată de două plane, iar fiecare plan de trei puncte din mulțimea M a celor n puncte date. Numărul dreptelor de intersecție care nu conțin nici un punct din M este egal cu $\frac{1}{2}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}$, deoarece putem alege 3 puncte din cele n în $\binom{n}{3}$ moduri și un alt plan în mulțimea celor rămase în $\binom{n-3}{3}$ moduri, ordinea alegerii neavînd importanță pentru dreapta de intersecție.

Numărul dreptelor care conțin un singur punct din M este egal cu $\frac{3}{2}\binom{n}{3}\binom{n-3}{2}$, deoarece putem alege trei puncte în $\binom{n}{3}$ moduri și considerînd pe rînd fiecare din cele trei puncte comun celor două planuri, al doilea plan poate fi ales în $\binom{n-3}{2}$ moduri, alegînd alte două puncte din mulțimea celor $n-3$ puncte rămase, ordinea alegerii celor două plane fiind fără importanță.

În mod analog găsim că numărul dreptelor care conțin două puncte din M este egal cu $\binom{n}{2}$. Orice dreaptă de intersecție nu poate conține mai mult de două puncte din M, deoarece oricare patru puncte din M nu sînt coplanare.

Deci numărul total de drepte de intersecție este egal cu:

$$\frac{1}{2}\binom{n}{3}\left(\binom{n-3}{3}+3\binom{n-3}{2}\right)+\binom{n}{2}.$$

4.30. Putem alege un vîrf al triunghiului în n moduri. Celelalte 2 vîrfuri trebuie să fie alese printre cele $n-3$ vîrfuri diferite de vîrful deja ales și neadiacente cu el. Avem $\binom{n-3}{2}=\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ posibilități, din care trebuie scăzut numărul $n-4$, care corespunde numărului de cazuri cînd cele două vîrfuri alese sînt unite printr-o latură a poligonului. Rămîn deci $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ posibilități de a alege celelalte două vîrfuri. Deoarece oricare din cele trei vîrfuri poate fi ales ca prim vîrf, rezultă $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ posibilități de a alege un triunghi care verifică condițiile impuse.

4.31. Deoarece oricare trei diagonale nu sînt concurente într-un punct interior poligonului, rezultă că oricare punct interior de intersecție este unic determinat de cele două diagonale care trec prin el, deci de cele 4 vîrfuri ale poligonului care sînt extremități ale celor două diagonale.

Rezultă că numărul punctelor de intersecție ale diagonalelor, interioare poligonului, este egal cu $\binom{n}{4}$.

Fiecare diagonală AB intersectează toate diagonalele care unesc perechi de vîrfuri diferite de A și B, în puncte diferite de vîrfurile poligonului.

Rezultă că numărul punctelor de intersecție, diferite de vîrfuri, ale diagonalei AB cu celelalte diagonale ale poligonului este egal cu numărul diagonalelor care nu au nici o extremitate comună cu AB. Însă acest număr este egal cu:

$$\frac{n(n-3)}{2}-2(n-3)+1=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1.$$

deoarece în A cît și în B sînt incidente cîte $n-3$ diagonale, iar diagonala AB a fost numărată de 2 ori: și printre diagonalele incidente cu A și printre diagonalele incidente cu B.

Dacă înmulțim acest număr cu numărul total de diagonale, egal cu $\frac{n(n-3)}{2}$, fiecare punct de intersecție va fi numărat de două ori, relativ la fiecare diagonală pe care el se găsește.

Deci numărul total de puncte de intersecție diferite de vîrfuri, este egal cu:

$$\frac{n(n-3)((n-3)(n-4)+2)}{8} = \frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}.$$

Scăzînd din acest număr numărul punctelor de intersecție situate în interiorul poligonului, găsim numărul punctelor exterioare de intersecție egal cu:

$$\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$$

pentru orice $n \geqslant 3$.

4.32. Fie $A_1, \ldots, A_n$ cele n puncte pe cerc, notate în ordinea de întîlnire cînd parcurgem circumferința în sensul acelor de ceasornic. Rezultă că $A_1A_2 \ldots A_n$ este un poligon convex. Dacă acest poligon nu are trasată nici o diagonală, laturile poligonului determină în cerc împreună cu circumferința $n+1$ regiuni. Să desenăm pe rînd cele $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale și să numărăm cîte noi regiuni apar de fiecare dată cînd desenăm o nouă diagonală.

Fiecare nouă diagonală produce exact atîtea noi regiuni cît este numărul de segmente în care ea este divizată de diagonalele deja existente. Însă acest număr este cu o unitate mai mare decît numărul de puncte de intersecție ale acestei diagonale cu diagonalele deja existente, situate în interiorul cercului. Deoarece prin acest procedeu fiecare punct de intersecție a două diagonale situat în interiorul poligonului este obținut o dată și numai o dată, rezultă că numărul total de noi regiuni este egal cu suma dintre numărul de diagonale și numărul de puncte de intersecție situate în interiorul poligonului. Deoarece conform ipotezei nu există trei diagonale care să fie concurente într-un punct situat în interiorul poligonului, rezultă că aplicația care asociază fiecărui punct interior de intersecție a două diagonale mulțimea celor 4 vîrfuri ale poligonului care sînt extremitățile celor două diagonale este o bijecție.

Rezultă că numărul total de regiuni determinate în interiorul cercului este egal cu:

$$n+1+\frac{n(n-3)}{2}+\binom{n}{4} = \binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1,$$

deoarece numărul punctelor interioare de intersecție este egal cu $\binom{n}{4}$.

Formula este valabilă pentru orice $n \geqslant 1$.

4.33. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul c al curbelor. Dacă $c = 1$, nu există puncte de intersecție și deci numărul regiunilor este 1. Să presupunem că proprietatea are loc pentru orice familie formată din c curbe, care au n_p puncte de intersecție avînd multiplicitatea p, $p \geqslant 2$,

definind multiplicitatea unui punct de intersecție ca fiind numărul curbelor care se intersectează în acest punct.

Conform ipotezei de inducție, aceste c curbe delimitează $1 + n_2 + \ldots + (p-1)n_p + \ldots$ regiuni închise. Să considerăm o nouă curbă și să presupunem că ea trece prin k_p puncte de intersecție, de multiplicitate p, cu primele c curbe ($p \geqslant 2$). Numărul total de puncte de intersecție pe noua curbă este egal cu $k_2 + k_3 + \ldots + k_p + \ldots$, deci numărul de porțiuni delimitate pe această curbă este $k_2 + k_3 + \ldots$

Fiecare porțiune corespunde unei noi regiuni în raport cu familia celor c curbe, deci numărul total de regiuni delimitate de familia celor $c+1$ curbe este egal cu:

$$1 + n_2 + 2n_3 + \ldots + (p-1)n_p + \ldots + k_2 + k_3 + \ldots + k_p + \ldots \quad (1)$$

Să notăm cu m_p numărul de puncte de intersecție de multiplicitate p pentru familia celor $c+1$ curbe închise. Aceste numere se pot exprima în funcție de n_p și k_p sub forma:

$$m_p = n_p - k_{p+1} + k_p,$$

deoarece din cele n_p puncte de intersecție de multiplicitate p din familia celor c curbe trebuie scăzut numărul k_{p+1} al acestor puncte care devin de multiplicitate $p+1$ prin situarea pe noua curbă și trebuie adunat numărul k_p al punctelor care erau de multiplicitate $p-1$ și devin de multiplicitate p în familia celor $c+1$ curbe. Obținem:

$$1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + (p-1)m_p + \ldots = 1 + (n_2 - k_3 + k_2) +$$
$$+ 2(n_3 - k_4 + k_3) + \ldots + (p-1)(n_p - k_{p+1} + k_p) + \ldots =$$
$$= 1 + n_2 + 2n_3 + \ldots + (p-1)n_p + \ldots + k_2 + k_3 + \ldots + k_p + \ldots,$$

adică numărul (1) de regiuni pentru familia formată din $c+1$ curbe. Proprietatea este demonstrată prin inducție.

4.34. Dacă $(S_1, \ldots, S_m)$ are un *SRD*, de exemplu $(a_1, \ldots, a_m)$ obținem $S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k} \supset \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, deci $|S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k$ pentru orice k și orice alegere a numerelor distincte două cîte două $i_1, \ldots, i_k$.

Vom demonstra suficiența prin inducție după m.

Să presupunem că părțile $S_1, \ldots, S_m$ satisfac condiția impusă pentru existența unui *SRD*. Pentru $m = 1$ orice element din S_1 formează un *SRD*.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice $m' < m$ și fie $M(S) = (S_1, \ldots, S_m)$.
Vom studia două cazuri:

1) $S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}$ conține cel puțin $k+1$ elemente pentru $1 \leqslant k \leqslant m-1$ și pentru orice alegere a numerelor distincte $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$. Fie $a_1 \in S_1$. Îl suprimăm pe a_1 ori de cîte ori el apare în celelalte mulțimi din $M(S)$ și notăm mulțimile obținute cu $S_2', S_3', \ldots, S_m'$. Atunci $M'(S) = (S_2', S_3', \ldots, S_m')$ satisface condiția necesară și suficientă de existență a unui *SRD*, deoarece mulțimea $S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}$ conține cel puțin $k+1$ elemente și am suprimat un singur element a_1. Conform ipotezei de inducție $M'(S)$ are un *SRD*. Elementul a_1 împreună cu un *SRD* pentru $M'(S)$ ne dau un *SRD* pentru $M(S)$ în care a_1 îl reprezintă pe S_1, căci a_1 nu mai apare în mulțimile din $M'(S)$.

2) Dacă există $1 \leqslant k \leqslant m-1$ și o alegere $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ astfel încît $|S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| = k$, se renumerotează părțile $S_1, \ldots, S_m$ astfel încît S_{i_1} să devină S_1, S_{i_2} să devină S_2, ..., S_{i_k} să devină S_k. Conform ipotezei inductive $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ are un *SRD*, fie $D^* = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ și să suprimăm elementele lui D^* peste tot unde ele apar în mulțimile $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$. Notăm mulțimile astfel obținute prin $S^*_{k+1}, S^*_{k+2}, \ldots, S^*_m$. Sistemul de mulțimi $M^*(S) = (S^*_{k+1}, \ldots, S^*_m)$ care conține $m-k$ mulțimi, satisface condiția necesară și suficientă pentru existența unui *SRD*. Într-adevăr, dacă $S^*_{i_1} \cup S^*_{i_2} \cup \ldots \cup S^*_{i_p}$ cu $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subset \{k+1, \ldots, m\}$ conține mai puțin de p elemente, atunci $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cup S^*_{i_1} \cup \ldots \cup S^*_{i_p}$ ar conține mai puțin de $k+p$ elemente, deoarece $|S_1 \cup \ldots \cup S_k| = k$. Deoarece $S_1 \cup \ldots \cup S_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$, ținînd seama de construcția făcută, rezultă că $|S_1 \cup \ldots \cup S_k \cup S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_p}| < k+p$, ceea ce contrazice ipoteza că $M(S)$ satisface condiția necesară și suficientă pentru existența unui *SRD*.

Conform ipotezei de inducție, $M^*(S)$ are un *SRD*, care împreună cu D^* formează un *SRD* pentru $M(S)$, deoarece $M^*(S)$ nu conține elementele din D^*.

(Ph.Hall, J. London Math.Soc., 10(1935), 26—30).

4.35. Să arătăm mai întîi că dacă F este o familie minimă de submulțimi cu h elemente ale lui X, există un element $x \in X$ astfel încît:

$$|\{E \mid E \in F,\ x \in E\}| \geqslant \frac{h}{n} M(n, k, h). \tag{1}$$

Să presupunem prin reducere la absurd că proprietatea nu este adevărată, adică pentru orice element $x \in X$ numărul mulțimilor din familia F care îl conțin este mai mic decît $\frac{h}{n} M(n, k, h)$. În acest caz, numărul de apariții ale elementelor din X în mulțimile din F, care este egal cu $M(n, k, h)h$, este minorat strict de produsul dintre numărul n al elementelor lui X și numărul $\frac{h}{n} M(n, k, h)$, care majorează numărul de apariții ale fiecărui element în mulțimile din X.

Am obținut deci că $hM(n, k, h) < hM(n, k, h)$, deci am ajuns la o contradicție și proprietatea (1) este justificată.

Rezultă că dacă notăm $G = \{E \mid E \in F,\ x \notin E\}$, obținem:

$$|G| = M(n, h, k) - |\{E \mid E \in F,\ x \in E\}| \leqslant \frac{n-h}{n} M(n, k, h).$$

Vom arăta că $M(n-1, k, h) \leqslant |G|$, ceea ce va demonstra prima inegalitate.

Pentru aceasta, este suficient să arătăm că familia G are proprietatea că orice submulțime cu k elemente a mulțimii $Y = X \setminus \{x\}$ conține cel puțin o mulțime cu h elemente din G.

Fie $Z \subset Y$ cu $|Z| = k$. Deoarece Z este o submulțime cu k elemente a lui X, rezultă că există o mulțime T cu h elemente din F, astfel încît $T \subset Z$. Deoarece Z nu conține elementul x, rezultă că $x \notin T$ și deci mulțimea T face parte din familia G, ceea ce demonstrează inegalitatea 1).

(G. Katona, T. Nemetz, M. Simonovits, Mat. Lapok, 15(1964), 228—238).

Iterînd această inegalitate, deducem că

$$M(n, k, h) \geqslant \left\{\frac{n}{n-h}\left\{\frac{n-1}{n-h-1}\cdots\left\{\frac{k+1}{k-h+1}\right\}\cdots\right\}\right.;$$

unde $\{x\}$ reprezintă cel mai mic întreg mai mare sau egal cu x, deoarece $M(k, k, h) = 1$.

(J. Schönheim, Pacific J. Math., 14(1964), 1405—1411).

Pentru a demonstra 2), vom face următoarea construcție: Vom considera un element $x \in X$ și vom nota cu G familia extremală formată din $M(n-1, k, h)$ submulțimi cu h elemente ale lui $Y = X \setminus \{x\}$ și cu H familia extremală formată din $M(n-1, k-1, h-1)$ submulțimi cu $h-1$ elemente ale lui Y, astfel încît orice submulțime cu $k-1$ elemente a lui Y să conțină măcar o submulțime din H.

Vom nota cu E familia obținută din H prin adăugarea elementului x la fiecare mulțime din H.

$G \cup E$ are proprietatea că $G \cap E = \emptyset$, deci $|G \cup E| = M(n-1, k, h) + M(n-1, k-1, h-1)$. Vom arăta că orice mulțime $Z \subset X$ cu $|Z| = k$ conține o mulțime cu h elemente din $G \cup E$, ceea ce va justifica 2).

Într-adevăr, dacă $x \in Z$, atunci $Z \setminus \{x\}$ este o submulțime cu $k-1$ elemente a lui Y, deci conține o submulțime $A \in H$ cu $h-1$ elemente, deci $A \cup \{x\} \subset Z$ și $A \cup \{x\} \in E$.

Dacă $x \notin Z$, atunci Z este o submulțime cu k elemente a lui Y, deci conține o submulțime $B \in G$.

(J. Kalbfleisch, R. Stanton, Int. Conf. on Combinatorial Mathematics, 1970, Ann.New York Acad. Sci., 175 (1970), 366—369).

Pentru a obține marginea inferioară din 3), să observăm că o aceeași submulțime A cu h elemente a lui X este conținută în $\binom{n-h}{k-h}$ submulțimi cu k elemente ale lui X.

Dacă pentru fiecare din cele $M(n, k, h)$ mulțimi ale unei familii extremale F construim toate cele $\binom{n-h}{k-h}$ submulțimi cu k elemente care o conțin, se obțin în acest mod toate cele $\binom{n}{k}$ submulțimi cu k elemente ale lui X, deoarece orice mulțime cu k elemente conține o mulțime cu h elemente din F.

Deci putem scrie $M(n, k, h)\binom{n-h}{k-h} \geqslant \binom{n}{k}$, de unde deducem:

$$M(n, k, h) \geqslant \binom{n}{k}\Big/\binom{n-h}{k-h} = \binom{n}{h}\Big/\binom{k}{h}.$$

Marginea superioară se demonstrează prin inducție după indicele n, ținînd seama de inegalitatea 2), de relația de recurență a numerelor binomiale și de faptul că ea devine egalitate pentru $n = k$ (ca și pentru $k = h$ sau $h = 1$). Într-adevăr, $M(n, k, h) \leqslant M(n-1, k-1, h-1) + M(n-1, k, h) \leqslant$

$$\leqslant \binom{n-k+h-1}{h-1} + \binom{n-k+h-1}{h} = \binom{n-k+h}{h}.$$

(I. Tomescu, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 3,15(1973), 355—362).

Expresia numerelor $M(n, k, h)$ nu este cunoscută în cazul general și ele reprezintă în același timp numărul minim de bilete a h numere necesare

pentru a avea cel puțin un bilet cîștigător la o loterie la care se face o singură extragere de k numere, dintr-un total de n numere. Conjectura lui Turán afirmă că $M(2n, 5, 3) = 2\binom{n}{3}$.

4.36. Pentru a deduce 1) vom considera că submulțimile cu două elemente sînt muchiile unui graf cu mulțimea vîrfurilor X, de cardinal n. Trebuie să găsim numărul minim de muchii ale acestui graf, astfel încît oricare mulțime de k vîrfuri să conțină cel puțin o muchie. Trecînd la graful complementar, trebuie să găsim numărul maxim de muchii ale unui graf G cu n vîrfuri, care nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri. Expresia lui $M(n, k, 2)$ se obține deci sub forma $\binom{n}{2} - M(n, k)$, unde $M(n, k)$ este dat de teorema lui Turán (problema 9.9.).

2) Pentru $k = 1$ se deduce $M(n, n-h, 1) = n - (n-h) + 1 = h + 1$. Fie acum $k \geqslant 2$ și $S \subset X$, $|S| = h$ și $P_{k-1}(X \setminus S)$ familia submulțimilor cu $k-1$ elemente ale lui $X \setminus S$. Putem defini o funcție:

$$f : S \to P_{k-1}(X \setminus S),$$

astfel încît mulțimile $(f(x))_{x \in S}$ să fie două cîte două disjuncte, deoarece $n - h \geqslant h(k-1)$. Fie familia F compusă din h submulțimi ale lui X, fiecare de cardinal k, definită astfel:

$$F = (\{x\} \cup f(x))_{x \in S}.$$

Există o submulțime a lui X și anume $X \setminus S$, astfel ca $|X \setminus S| = n - h$, cu proprietatea că nu conține nici o mulțime din F.

Se poate obține un rezultat analog pentru o familie compusă din h submulțimi cu k elemente ale lui X, care nu sînt disjuncte două cîte două, deci $M(n, n-h, k) \geqslant h + 1$.

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie o mulțime $T \subset X$, $|T| = h + 1$. Există o funcție $g : T \to P_{k-1}(X \setminus T)$, astfel încît mulțimile din familia $(g(x))_{x \in T}$ să fie disjuncte două cîte două, deoarece $n - h - 1 \geqslant (h+1)(k-1)$. Să notăm

$$G = (\{x\} \cup g(x))_{x \in T}.$$

Obținem $|\{x\} \cup g(x)| = k$ pentru orice $x \in T$ și G conține $h + 1$ submulțimi.

Fie $U \subset X$, $|U| = n - h$ și să presupunem că există indicii $i_1, \ldots, i_r$ $(0 \leqslant r \leqslant h+1)$, astfel încît U să nu conțină n_p elemente din mulțimea $f(x_{i_p})$ pentru orice $1 \leqslant p \leqslant r$. Putem însă scrie:

$$n - h = |U| = |U \cap T| + |U \cap (X \setminus T)| \leqslant |U \cap T| + n - h - 1 - \sum_{p=1}^{r} n_p, \text{ deci } |U \cap T| \geqslant \sum_{p=1}^{r} n_p + 1 \geqslant r + 1.$$

Deci U conține cel puțin un element $x \in T$ astfel încît $x \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$, deci $U \supset \{x\} \cup g(x) \in G$. Am obținut că U conține cel puțin o submulțime cu k elemente din G, adică $M(n, n-h, k) \leqslant h + 1$, deci $M(n, n-h, k) = h + 1$ pentru orice $k \geqslant 2$ și $n \geqslant k(h+1)$.

(I. Tomescu, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 8,15(1973), 355—362).

4.37. Prima egalitate se justifică numărînd în două moduri numărul de incidențe ale obiectelor în blocuri, deoarece fiecare din cele b blocuri conține k obiecte, iar fiecare din cele v obiecte aparține la exact r blocuri. Pentru a II-a egalitate se numără în două moduri aparițiile în blocuri ale perechilor care conțin un obiect fixat a_1.

Obiectul a_1 apare în r blocuri și în fiecare din ele formează perechi cu celelalte $k - 1$ obiecte, iar pe de altă parte, obiectul a_1 formează perechi cu fiecare din celelalte $v - 1$ obiecte rămase, fiecare pereche fiind inclusă în λ blocuri.

4.38. Matricea $(k - \lambda)I + \lambda J$ are forma:

$$\begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ \vdots & & & \\ \lambda & \dots & \lambda & k \end{pmatrix}$$

avînd k pe diagonala principală și toate celelalte elemente egale cu λ.

Dacă A este matricea de incidență a unei (v, k, λ)-configurații, rezultă că fiecare coloană a matricei conține k elemente egale cu 1 și restul de $v - k$ elemente egale cu zero.

Dacă notăm $B = A^TA$, elementul b_{ij} al matricei B este produsul scalar ale coloanelor i și j ale matricei A. Astfel, $b_{ii} = k$, adică numărul de unități în coloana i a matricei A. Dacă $i \neq j$, atunci coloanele i și j ale matricei A au un 1 în linia t dacă și numai dacă elementul t din X aparține ambelor mulțimi X_i și X_j. Deci elementul nediagonal b_{ij} este egal cu $|X_i \cap X_j| = \lambda$. Reciproc, dacă o matrice pătrată A de ordinul v cu elemente 0 și 1 verifică $A^TA = (k - \lambda)I + \lambda J$ și $0 < \lambda < k < v - 1$, definind

$$X_j = \{i \mid a_{ij} = 1\}$$

pentru orice $1 \leqslant j \leqslant v$, rezultă că a) și b) sînt verificate.

4.39. Mai întîi să evaluăm determinantul matricei A^TA, unde A este matricea de incidență a unei (v, k, λ)-configurații. Ținînd seama de forma matricei A^TA dată de problema precedentă, să scădem pe rînd prima linie din linia a II-a, a III-a, ..., din linia v și apoi să adunăm pe rînd coloana a II-a, a III-a, ..., coloana v cu prima coloană, obținînd o matrice superior diagonală cu elementele de pe diagonala principală egale respectiv cu $k + \lambda(v - 1) = v\lambda - \lambda + k$, iar restul de $v - 1$ elemente egale cu $k - \lambda$. Deci $\det(A^TA) = (k - \lambda)^{v-1}(v\lambda - \lambda + k) > 0$, adică matricea A este nesingulară, deoarece $\det(A^TA) = (\det A)^2$.

Pentru a arăta că (v, k, λ)-configurația de matrice A este un *BDIE* cu parametrii (v, v, k, k, λ), trebuie să arătăm că fiecare element aparține la exact k blocuri și fiecare pereche de obiecte distincte este inclusă în exact λ blocuri. Ori aceste condiții sînt satisfăcute dacă și numai dacă matricea A satisface ecuația:

$$AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J, \tag{1}$$

care este asemănătoare cu ecuația verificată de matricea de incidență a unei (v, k, λ)-configurații. Justificarea relației (1) este asemănătoare cu cea dată în problema anterioară, deoarece dacă notăm $C = AA^T$, elementul c_{ij} al matricei C este produsul scalar al liniilor i și j ale matricei A. Astfel $c_{ii} = k$ dacă numărul de unități din linia i a matricei A este k, deci fiecare

obiect aparține la exact k blocuri. Dacă $i \neq j$, liniile i și j ale matricei A au un 1 în coloana t dacă și numai dacă elementele i și j aparțin ambele blocului t, deci numărul de blocuri care conțin perechea $\{i, j\}$ este egal cu λ. Deci trebuie în fond să arătăm că dacă matricea A verifică ecuația $A^TA = (k - \lambda)I + \lambda J$, atunci avem și $AA^T = (k - \lambda)\ I + \lambda J$.

Deoarece în fiecare coloană a matricei A există k elemente egale cu 1 și $v - k$ elemente nule, rezultă că $JA = kJ$. Obținem deci:

$$(JA)A^{-1} = (kJ)A^{-1}.$$

Înmulțind la dreapta în ambii membri cu matricea AA^{-1}, deducem

$$J = kJA^{-1}\ AA^{-1} = kJA^{-1}, \text{ deci}$$

$$k^{-1}J = JA^{-1}. \tag{2}$$

Dar $A^T = (A^TA)A^{-1} = ((k - \lambda)I + \lambda J)A^{-1} = (k - \lambda)A^{-1} + \lambda JA^{-1} =$

$= (k - \lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J$, ținînd seama de (2). Deci $A^TJ = (k - \lambda)A^{-1}J +$

$$+ \lambda k^{-1}J^2 = (k - \lambda)A^{-1}J + \lambda k^{-1}vJ,$$

deoarece $J^2 = vJ$, matricea J avînd ordinul v.

Pe de altă parte, $A^TJ = (JA)^T = (kJ)^T = kJ$.

Egalînd cele două expresii ale lui A^TJ, deducem

$$kJ = (k - \lambda)A^{-1}\ J + \lambda k^{-1}vJ, \text{ de unde}$$

$$A^{-1}J = mJ \text{ sau } J = mAJ,$$

dacă se notează $m = (k - \lambda k^{-1}v)/(k - \lambda)$.

Dar $vJ = J^2 = J(mAJ) = m(JA)J = mkJ^2 = mkvJ$, de unde deducem $v = mkv$ sau $mk = 1$. Deci $k - \lambda = k^2 - \lambda v$ sau $k^2 - k = \lambda(v - 1)$ și $A^{-1}J = mJ = k^{-1}J$, adică $J = k^{-1}AJ$ sau

$$AJ = kJ.$$

Am obținut deci că $JA = AJ$, proprietate esențială în demonstrarea egalității (1), după cum urmează:

$$AA^T = A(A^TA)A^{-1} = A((k - \lambda)I + \lambda J)A^{-1} =$$

$$= (k - \lambda)I + \lambda(AJ)A^{-1} = (k - \lambda)I + \lambda J(AA^{-1}) = (k - \lambda)I + \lambda J.$$

4.40. Se observă că un sistem Steiner este un $BDIE$ pentru care $k = 3$ și $\lambda = 1$. Ținînd seama de relațiile din problema 4.37 se deduce $r = \frac{v - 1}{2}$ și $b = \frac{v(v - 1)}{6}$, deci $v \equiv 1$ sau $3 \pmod 6$ pentru ca b să fie întreg. Kirkman a demonstrat în 1847 că aceste condiții sînt și suficiente pentru existența unui sistem Steiner.

O demonstrație mai simplă a fost dată recent (A.J.W. Hilton, J. Combinatorial Theory, A13(1972), 422—425).

4.41. Am arătat la rezolvarea problemei 4.39 că $\det(A^TA) = (\det A)^2 =$ $= (k - \lambda)^{v-1}\ (v\lambda - \lambda + k)$, unde A este matricea de incidență a unei (v, k, λ)-configurații sau a unui $BDIE$ cu parametrii (v, v, k, k, λ). Deoarece $r = k$ și $v = b$, din relațiile verificate de parametrii unui $BDIE$ se obține $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$, de unde $v\lambda - \lambda + k = k^2$. Deci $(k - \lambda)^{v-1}\ k^2$

este pătratul unui număr întreg. Deoarece $v - 1$ este număr impar, rezultă că diferența $k - \lambda$ este pătrat perfect.

4.42. Dacă notăm cu p numărul maxim de submulțimi cu proprietățile cerute, obținem $p \geqslant \binom{k}{r}\binom{n-k}{[(n-k)/2!]}$, considerînd familia de mulțimi

$$\{A \cup B \mid A \subset Y,\ |A| = r;\ B \subset X \setminus Y,\ |B| = [(n-k)/2]\}.$$

Pentru a obține inegalitatea contrară, fie F o familie maximală de mulțimi cu proprietățile cerute și $A \in F$. Notînd

$$F_1 = \{B \mid B \in F,\ B \cap Y = A \cap Y\},$$

fie F_2 familia obținută din F_1 prin suprimarea tuturor elementelor din $A \cap Y$ din mulțimile B ale lui F_1.
F_2 este o familie de submulțimi incomparabile în raport cu incluziunea ale lui $X \setminus Y$, deci conform teoremei lui Sperner $|F_2| \leqslant \binom{n-k}{[(n-k)/2]}$, ceea ce implică $p \leqslant \binom{k}{r}\binom{n-k}{[(n-k)/2]}$, deoarece $|A \cap Y| = r$.

5. PARTIȚII ALE UNUI ÎNTREG

5.1. Vom nota prin $A = \{m \mid 1 \leqslant m \leqslant 3n, n \equiv 0 \pmod 3\}$, $B = \{m \mid 1 \leqslant m \leqslant 3n, n \equiv 1 \pmod 3\}$, $C = \{m \mid 1 \leqslant m \leqslant 3n, n \equiv 2 \pmod 3\}$, deci $|A| = |B| = |C| = n$. Suma $x + y + z \equiv 0 \pmod 3$ dacă și numai dacă $x, y, z \in A$ sau $x, y, z \in B$ sau $x, y, z \in C$ sau x, y, z aparțin fiecare unei alte mulțimi dintre A, B, C.

Deci numărul de soluții este $3\binom{n}{3} + n^3 = \dfrac{n(3n^2 - 3n + 2)}{2}$.

5.2. Partițiile numărului n cu cel mult k părți formează o mulțime cu $P(n, 1) + P(n, 2) + \ldots + P(n, k)$ elemente. Fiecare partiție a lui n cu cel mult k părți poate fi scrisă sub forma $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + 0 + \ldots + 0$, unde suma conține k termeni iar $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 1 (1 \leqslant m \leqslant k)$.

Din această exprimare a lui n putem obține o partiție a lui $n + k$ cu k părți astfel:

$n + k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \ldots + (a_m + 1) + 1 + \ldots + 1$, unde suma conține k termeni și $a_1 + 1 \geqslant a_2 + 1 \geqslant \ldots \geqslant a_m + 1 \geqslant 1$.

Aplicația astfel definită este o injecție, deoarece unor partiții diferite ale lui n cu cel mult k părți le corespund partiții diferite ale lui $n + k$ cu k părți. Ea este și surjecție, deoarece orice partiție a lui $n + k$ cu k părți provine din acea partiție a lui n cu $m \leqslant k$ părți obținută prin scăderea unei unități din fiecare termen al partiției lui $n + k$ și reținînd primii termeni diferiți de zero. Existența unei bijecții între mulțimea partițiilor lui n cu cel mult k părți și mulțimea partițiilor lui $n + k$ cu k părți justifică recurența dată, care permite calculul prin recurență al tuturor numerelor $P(n, k)$, plecînd de la valorile $P(n, 1) = P(n, n) = 1$ pentru orice n și $P(n, k) = 0$ pentru $n < k$.

5.3. Vom defini o bijecție de la mulțimea partițiilor lui n în părți impare pe mulțimea partițiilor lui n în părți inegale două cîte două.

Astfel dacă într-o partiție a lui n în părți impare numărul $2k+1$ apare de p ori, îl vom scrie pe p ca o sumă de puteri ale lui 2:

$$p = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_s}, \tag{1}$$

scrierea fiind unică dacă presupunem că $i_1 > i_2 > \ldots > i_s \geqslant 0$.

Cele $(2k+1)p$ căsuțe ale diagramei Ferrers asociate partiției lui n le vom regrupa astfel: vom așeza pe cîte o linie $(2k+1)2^{i_1}$ căsuțe, $(2k+1)2^{i_2}$ căsuțe, ..., $(2k+1)2^{i_s}$ căsuțe, respectînd ordinea descrescătoare a numărului de căsuțe de sus în jos. De exemplu, partiției $7+5+5+3+3+3+1+1+1+1$ i se asociază în acest mod partiția în părți inegale două cîte două $10+7+6+4+3$. Partiția astfel obținută a lui n conține numai părți distincte două cîte două, deoarece orice întreg se scrie în mod unic ca produsul dintre un număr impar și o putere a lui 2.

Ținînd seama de unicitatea scrierii (1), rezultă injectivitatea acestei aplicații. Pentru a arăta că această corespondență este și surjectivă, să considerăm o partiție P a lui n în părți distincte două cîte două. Fiecare parte fiind un număr natural, se scrie ca produsul dintre un număr impar și o putere a lui 2. Regrupînd termenii sumei și dînd factor comun, obținem numai termeni de forma $(2k+1)p$, unde $k \geqslant 0$, care vor genera p termeni egali cu $2k+1$.

Aranjînd acești termeni în ordine descrescătoare, obținem o partiție Q a lui n în părți impare. Dacă aplicăm lui Q transformarea definită anterior, obținem partiția P, ceea ce demonstrează surjectivitatea acestei aplicații.

5.4. Fie $a_1 + \ldots + a_m = n$ o partiție a întregului n în m părți diferite două cîte două.

Deci $a_1 > a_2 > \ldots > a_m \geqslant 1$, ceea ce implică:

$$a_1 - (m-1) \geqslant a_2 - (m-2) \geqslant \ldots \geqslant a_{m-1} - 1 \geqslant a_m \geqslant 1.$$

Rezultă că scrierea

$$(a_1 - (m-1)) + (a_2 - (m-2)) + \ldots + a_m = n - \binom{m}{2}$$

este o partiție a numărului $n - \binom{m}{2}$ în m părți.

Deci fiecărei partiții a întregului n în m părți diferite două cîte două i-am asociat o partiție a numărului $n - \binom{m}{2}$ în m părți. Această corespondență este injectivă. Pentru a arăta că este și surjectivă, deci bijectivă, plecînd de la o partiție a numărului $n - \binom{m}{2}$ în m părți vom aduna respectiv numerele $m-1, m-2, \ldots, 1, 0$ la cele m părți în ordinea lor descrescătoare, obținînd o partiție a lui n în m părți distincte două cîte două. Dacă aplicăm transformarea descrisă mai înainte partiției astfel obținute găsim partiția numărului $n - \binom{m}{2}$ în m părți, de la care am plecat. Deci corespondența descrisă de la mulțimea partițiilor întregului pozitiv n cu m părți distincte două cîte două la mulțimea celor $P\left(n - \binom{m}{2}, m\right)$ partiții ale numărului $n - \binom{m}{2}$ cu m părți este o bijecție, ceea ce demonstrează proprietatea.

5.5. Să presupunem că partiția lui n conține k_1 termeni egali cu 1. Sumele parțiale formate cu aceste elemente egale cu 1 reprezintă în mod unic orice număr cuprins între 1 și k_1. Deci în partiția lui n nu pot apare numerele $2, \ldots, k_1$ din cauza condiției de unicitate a reprezentării. Deoarece numărul $k_1 + 1$ trebuie să se reprezinte ca o sumă parțială, el trebuie să fie un termen al partiției cu multiplicitatea $k_2 > 0$.

În acest mod toate numerele cuprinse între 1 și $k_1 + k_2(k_1 + 1)$ au o reprezentare unică sub forma unei sume parțiale.

Raționînd astfel găsim că numerele care apar în partiția întregului n sînt:

$1, k_1 + 1, (k_1 + 1)(k_2 + 1), \ldots, (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_m + 1)$, unde $(k_1 + 1) \ldots (k_i + 1)$ are multiplicitatea egală cu k_{i+1} pentru $i = 1, \ldots, m$.

Deoarece suma acestor termeni este egală cu n, putem scrie:

$$n = k_1 + k_2(k_1 + 1) + \ldots + k_{m+1}(k_1 + 1) \ldots (k_m + 1), \text{ deci}$$

$$n + 1 = (k_1 + 1) \ldots (k_{m+1} + 1).$$

Dacă $n + 1$ este un număr prim, obținem $m = 0$ și singura partiție a lui n care satisface condiția problemei este compusă numai din termeni egali cu 1. Dacă $n + 1$ nu este număr prim, mai există o soluție a problemei. Într-adevăr putem scrie:

$$n + 1 = (k_1 + 1)(k_2 + 1)$$

cu $k_1, k_2 \geqslant 1$ și partiția:

$$n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1} + \underbrace{(k_1 + 1) + \ldots + (k_1 + 1)}_{k_2}$$

are proprietatea că orice număr întreg cuprins între 1 și n se reprezintă în mod unic ca o sumă parțială a acestei partiții.

5.6. Din modul de desfacere a parantezelor rezultă că $\psi(n) = Q_p(n) - Q_i(n)$, unde $Q_p(n)$ reprezintă numărul partițiilor lui n cu un număr par de părți distincte două cîte două, iar $Q_i(n)$ reprezintă numărul partițiilor lui n într-un număr impar de părți distincte două cîte două.

Pentru a demonstra identitatea lui Euler, vom defini o transformare a unei diagrame Ferrers cu un număr par de linii într-o diagramă cu un același număr de celule și un număr impar de linii și reciproc.

Deoarece considerăm numai partiții cu părți distincte două cîte două, diagramele unor astfel de partiții sînt formate din mai multe trapeze puse unele peste altele, ca în figura 5.1.

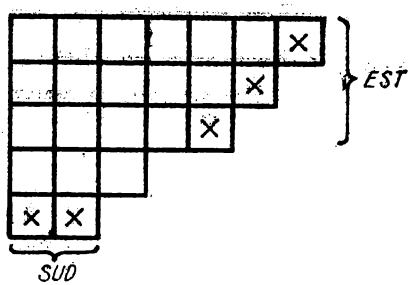


Fig. 5.1.

Să notăm numărul de celule din ultima linie a diagramei cu m, iar numărul de linii ale trapezului superior cu k.

Dacă $m \leqslant k$ vom suprima ultima linie a diagramei (linia SUD) și vom adăuga cîte o celulă primelor m linii ale trapezului superior al diagramei (pe linia înclinată la 45° la Estul diagramei). Această transformare nu modifică numărul total de celule. Se obține astfel o nouă diagramă cu toate liniile de lungimi diferite, pentru care s-a schimbat pari-

tatea numărului de linii în raport cu diagrama inițială. Diagrama din fig. 5.1. corespunde partiției

$$23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2.$$

După efectuarea acestei transformări, ducînd linia SUD peste linia EST, deoarece $m = 2$ și $k = 3$, se obține partiția: $23 = 8 + 7 + 5 + 3$.

Dacă diagrama conține cel puțin două trapeze și $m > k$, vom lua cîte o celulă din capătul EST al fiecărei linii a trapezului superior și aceste celule vor forma noua linie SUD a noii diagrame.

Această construcție este posibilă deoarece $m > k$ și deci noua linie SUD este mai scurtă decît vechea linie SUD a diagramei. Deoarece am micșorat cu cîte o unitate lungimile tuturor liniilor trapezului superior, rezultă că toate liniile noii diagrame au lungimi diferite două cîte două. Noua diagramă conține același număr de celule ca și diagrama inițială, dar se schimbă paritatea numărului de linii, deoarece noua diagramă conține cu o linie mai puțin sau mai mult decît diagrama inițială.

Aceeași operație poate fi efectuată cînd diagrama constă dintr-un singur trapez (cînd linia EST conține k celule și k este egal cu numărul părților lui n), dacă $m \neq k$ și $m \neq k + 1$.

Transformarea descrisă este involutivă în mulțimea partițiilor lui n cu părți diferite două cîte două, adică aplicînd de două ori această transformare obținem diagrama de la care am plecat. Deci ea este o bijecție. Astfel, diagramele Ferrers ale partițiilor lui n care permit această transformare se împart într-un același număr de diagrame cu un număr par, respectiv impar de linii. Să găsim care sînt diagramele care nu permit această transformare. Ele constau dintr-un singur trapez, pentru care $m = k$ sau $m = k + 1$ (fig. 5.2).

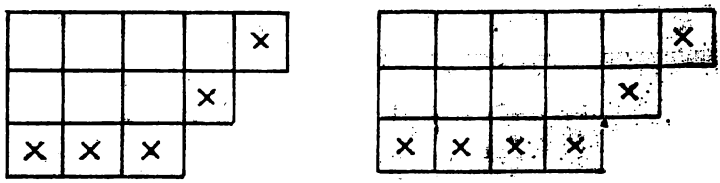


Fig. 5.2.

În primul caz $n = k^2 + 1 + 2 + \ldots + (k-1) = k^2 + \frac{k^2 - k}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}$, iar în cel de-al II-lea caz $n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2}$.

Deci dacă n nu este un număr de forma $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, el admite un același număr de partiții cu un număr par, respectiv impar de termeni diferiți doi cîte doi. Dacă $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, atunci $Q_p(n) = Q_i(n) + (-1)^k$, deoarece rămîne o singură diagramă în afara acestei bijecții, care are k linii. Deci $\psi(n) = 0$ pentru $n \neq (3k^2 \pm k)/2$ și $\psi(n) = (-1)^k$ dacă $n = (3k^2 \pm k)/2$, cu k număr întreg.

5.7. Vom da demonstrația în cazul a), în celelalte cazuri ea făcîndu-se analog.

Vom considera dezvoltarea:

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x^2)\dots(1-a_kx^k)\dots} = (1+a_1x+a_1^2x^2+\dots)(1+a_2x^2+$$

$$+a_2^2x^4+\dots)\dots(1+a_kx^k+a_k^2x^{2k}+\dots)\dots = 1+a_1x+(a_1^2+a_2)x^2+\dots+$$

$$+(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_k^{\lambda_k}+\dots)x^n+$$

Se observă că termenul $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_k^{\lambda_k}$ care intră în coeficientul lui x^n are proprietatea că $\lambda_1+2\lambda_2+\dots+k\lambda_k=n$, deci el definește o partiție a lui n și anume:

$$n=\underbrace{k+k+\dots+k}_{\lambda_k}+\dots+\underbrace{2+2+\dots+2}_{\lambda_2}+\underbrace{1+1+\dots+1}_{\lambda_1}.$$

Ținînd seama de modul de desfacere a parantezelor, se observă că în acest fel exponenții literelor care apar în coeficientul lui x^n generează fără repetiție toate partițiile lui n, deci dacă facem $a_1=a_2=\dots=1$, coeficientul lui x^n va fi tocmai numărul partițiilor lui n, dacă $P(n)$.

Acum c) rezultă imediat, deoarece $\lambda_2=\lambda_4=\dots=0$.

Pentru o demonstrație a punctului e) a se vedea rezolvarea problemei 5.13, iar d) se justifică analog cu e).

Proprietatea exprimată de problema 5.3 rezultă printr-un calcul algebric cu funcții generatoare, propus de Euler:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\dots=$$

$$=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$$

5.8. Ținînd seama de identitatea lui Euler și de expresia funcției generatoare a numerelor $P(n)$, putem scrie:

$$\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}P(i)x^i\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\psi(j)x^j\right)=1.$$

Egalînd cu zero coeficientul lui x^n din membrul stîng al acestei identități, obținem

$$\sum_{j\geqslant 0}P(n-j)\psi(j)=0, \text{ adică}$$

$$P(n)+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\left(P\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+P\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)\right)=0,$$

adică teorema pentagonală a lui Euler.

5.9. Considerînd dezvoltarea:

$(1+a_1x+a_1^2x^2)(1+a_2x^2+a_2^2x^4)(1+a_3x^3+a_3^2x^6)\dots$ se observă că fiecare monom $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_k^{\lambda_k}$ care se însumează în coeficientul lui x^n are proprietatea că $0\leqslant\lambda_i\leqslant 2$ pentru $1\leqslant i\leqslant k$ și $\lambda_1+2\lambda_2+\dots+k\lambda_k=n$, deci definește o partiție a lui n de forma:

$n=(k+\dots+k)+\dots+(2+\dots+2)+(1+\dots+1)$, factorii de repetiție fiind respectiv egali cu $\lambda_k,\dots,\lambda_2,\lambda_1$.

Ținînd seama de modul de desfacere a parantezelor, exponenții literelor care formează coeficientul lui x^n generează fără repetiție toate partițiile lui n pentru care nici un întreg nu apare mai mult de două ori ca o parte.

Luînd $a_1 = a_2 = \ldots = 1$, găsim deci funcția generatoare a acestor partiții ale lui n și anume $G_1(x) = (1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^4) \ldots (1 + x^p + x^{2p}) \ldots$

Făcînd același raționament ca pentru funcția generatoare a numerelor $P(n)$, obținem că funcția generatoare a numărului partițiilor lui n în părți nedivizibile cu 3 este

$$G_2(x) = (1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}(1 - x^4)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^7)^{-1} \ldots =$$

$$= \prod_{\substack{p=1 \\ p \not\equiv 0 \pmod 3}}^{\infty} (1 - x^p)^{-1}$$

Trebuie să mai arătăm că $G_1(x) = G_2(x)$, utilizînd identitatea: $(1 + x^p + x^{2p})(1 - x^p) = 1 - x^{3p}$. Într-adevăr, $G_1(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^6}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^9}{1 - x^3} \ldots = (1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}(1 - x^4)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^7)^{-1} \ldots = G_2(x)$.

5.10. Se știe că funcția generatoare a numerelor $P(n)$ este:

$$P(0) + P(1)x + \ldots + P(n)x^n + \ldots = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots} \tag{1}$$

(problema 5.7), iar funcția generatoare a numerelor $Q(n)$ are expresia:

$$Q(0) + Q(1)x + \ldots + Q(n)x^n + \ldots = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\ldots}, \tag{2}$$

unde $P(0) = Q(0) = 1$.

Substituind pe x prin $-x$ în (2), deducem:

$$\sum_{i \geqslant 0} (-1)^i Q(i) x^i = \frac{1}{(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)\ldots} \tag{3}$$

și substituind pe x prin x^2 în (2) obținem:

$$\sum_{i \geqslant 0} Q(i) x^{2i} = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^6)(1 - x^{10})\ldots}. \tag{4}$$

Identitatea

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\ldots} \cdot \frac{1}{(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)\ldots} =$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^6)(1 - x^{10})\ldots}$$

ne conduce deci la următoarea relație între seriile formale asociate:

$$\sum_{i \geqslant 0} Q(i) x^i \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j Q(j) x^j = \sum_{i \geqslant 0} Q(i) x^{2i}.$$

Egalînd coeficienții lui x^n din ambii membri, se obține a). Pentru a deduce b), se pleacă de la identitatea:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\ldots} \cdot \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots},$$

deci $\sum_{i\geqslant 0} P(i)x^i = \sum_{i\geqslant 0} Q(i)x^i \sum_{j\geqslant 0} P(j)x^{2j}$.

Egalînd coeficienții lui x^n din ambii membri se obține b).
(R. Karpe, Časopis Pěst. Mat., 94(1969), 108—114).

5.11. Fiecărei partiții a lui n în m părți, de forma $n = n_1 + \ldots + n_m$ cu $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_m \geqslant 1$, îi corespunde o partiție a lui $n - m$, obținută din scrierea:

$$n - m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_m - 1);$$

prin suprimarea eventualilor termeni nuli.

Aplicația astfel definită este injectivă. Vom demonstra că ea este și surjectivă pentru $m \geqslant \frac{n}{2}$. Într-adevăr, plecînd de la o partiție

$$n - m = r_1 + \ldots + r_k \qquad (1)$$

a lui $n - m$, obținem $k \leqslant m$, deoarece în caz contrar am avea $k \geqslant m + 1$, deci $n - m \geqslant k \geqslant m + 1$, ceea ce implică $m \leqslant \frac{n-1}{2}$. Însă acest rezultat contrazice ipoteza $m \geqslant \frac{n}{2}$. Adunînd acum cîte o unitate la fiecare termen din (1) și adăugînd $m - k \geqslant 0$ termeni egali cu 1, obținem o partiție a lui n cu m părți: $n = (r_1 + 1) + \ldots + (r_k + 1) + 1 + \ldots + 1$, a cărei imagine prin aplicația descrisă este partiția (1).

5.12. Dacă $n = x + y + z$ cu $x > y > z \geqslant 1$ este o partiție a întregului n cu trei părți diferite între ele, obținem:

$$(x + y) + (y + z) + (x + z) = 2n \text{ și}$$

$$(y + z) + (x + z) = x + y + 2z > x + y,$$

deci $x + y$, $y + z$, $x + z$ sînt lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul $2n$. În plus nu există două laturi egale, deoarece

$$x + y > x + z > y + z.$$

Reciproc, dacă $a > b > c$ sînt lungimile laturilor unui triunghi care se exprimă în numere întregi și al cărui perimetru este $2n$, notînd:

$$x = n - a,\ y = n - b,\ z = n - c$$

obținem $x = \frac{b + c - a}{2} > 0$, $y = \frac{a - b + c}{2} > 0$ și $z = \frac{a + b - c}{2} > 0$. În plus, $x < y < z$ și $x + y + z = n$, iar $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$.

Am definit astfel o aplicație de la mulțimea partițiilor întregului n cu trei părți distincte două cîte două pe mulțimea triunghiurilor cu lungimile laturilor numere întregi și pozitive, de perimetru $2n$ și care nu au două laturi egale. Această aplicație este injectivă. Construcția făcută ne arată că ea este

și surjectivă, deoarece plecînd de la un triunghi de perimetru $2n$ cu lungimile laturilor $a > b > c$ găsim o partiție a lui n de forma $n = x + y + z$, iar $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$, deci imaginea acestei partiții prin aplicația considerată este triunghiul de la care am plecat. Aplicația fiind bijectivă, găsim că numărul de triunghiuri care verifică condițiile impuse este egal cu $Q(n, 3)$.

Numărul n poate fi reprezentat ca o sumă de trei întregi pozitivi (două reprezentări putînd diferi și prin ordinea termenilor) în $\binom{n-1}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$ moduri distincte (problema 1.19).

Dintre acestea, doi termeni sînt egali în următoarele reprezentări ale lui n:

$$n = 1 + 1 + (n-2) = 1 + (n-2) + 1 = (n-2) + 1 + 1 =$$
$$= 2 + 2 + (n-4) = 2 + (n-4) + 2 = (n-4) + 2 + 2 =$$
$$= 3 + 3 + (n-6) = 3 + (n-6) + 3 = (n-6) + 3 + 3 = \ldots,$$

obținînd un număr de $\frac{3(n-2)}{2}$ reprezentări pentru n par și $\frac{3(n-1)}{2}$ reprezentări pentru n impar și $n \geqslant 4$.

Însă pentru $n = 1, 2, 3$ obținem $Q(n, 3) = 0$ și formula dată se verifică.

Dar dacă n este multiplu de 3, din numerele obținute mai trebuie scăzute 2 unități, deoarece există o reprezentare a lui n cu cei trei termeni egali care este numărată de 3 ori în loc să fie numărată o singură dată. De exemplu, pentru $n = 6$ obținem o singură partiție cu doi termeni egali cu 2 și anume $6 = 2 + 2 + 2$.

Pentru a obține numărul reprezentărilor cu trei termeni distincți doi cîte doi trebuie să scădem din numărul tuturor reprezentărilor întregului n ca sumă de trei întregi numărul reprezentărilor care conțin termeni egali. Obținem acest număr egal cu:

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) + 2 = \frac{n^2-6n+12}{2} \quad \text{dacă } n = 6k,$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2-6n+5}{2} \quad \text{dacă } n = 6k+1,$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2-6n+8}{2} \quad \text{dacă } n = 6k+2,$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) + 2 = \frac{n^2-6n+9}{2} \quad \text{dacă } n = 6k+3,$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2-6n+8}{2} \quad \text{dacă } n = 6k+4,$$

$$\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2-6n+5}{2} \quad \text{dacă } n = 6k+5.$$

Deoarece aceste reprezentări ale lui n ca sumă de trei termeni conțin numai termeni distincți doi cîte doi, pentru a obține partițiile lui n cu trei părți distincte două cîte două trebuie să împărțim numerele obținute în fiecare caz prin $3! = 6$, deoarece ordinea termenilor nu mai are importanță.

Se verifică imediat că toate expresiile obținute au forma $\left[\frac{n^2-6n+12}{12}\right] = \left[\frac{n(n-6)}{12}\right] + 1$ pentru orice n.

De exemplu pentru $n = 6k + 1$ obținem

$$\frac{n^2-6n}{12} = \frac{36k^2-24k-5}{12} = 3k^2 - 2k - \frac{5}{12} \text{ și deci}$$

$$\left[\frac{n^2-6n}{12}\right] + 1 = 3k^2 - 2k = \frac{n^2-6n+5}{12}.$$

Deoarece există inegalitățile:

$$\frac{n^2-6n+5}{12} \leqslant Q(n, 3) \leqslant \frac{n^2-6n+12}{12}$$

pentru orice n, rezultă că $Q(n, 3) = \left[\frac{n^2-6n+12}{12}\right]$.

5.13. Să arătăm mai întîi că numărul partițiilor lui n cu termeni impari diferiți doi cîte doi este egal cu numărul partițiilor lui n cu diagrame Ferrers simetrice. (Simetria unei diagrame Ferrers se referă la simetria axială în raport cu dreapta care trece prin colțul din stînga sus al diagramei și care coboară sub un unghi de 45° față de orizontală).

Pentru aceasta vom defini o bijecție de la mulțimea partițiilor lui n cu diagrame Ferrers simetrice pe mulțimea partițiilor lui n cu termeni impari diferiți doi cîte doi în modul următor:

Dacă avem o diagramă Ferrers simetrică cu k căsuțe pe diagonală, fie a_1 numărul total de căsuțe care se găsesc în prima linie și în prima coloană a diagramei. Deoarece diagrama este simetrică, rezultă că a_1 este număr impar. Vom nota cu a_2 numărul de căsuțe care se găsesc în prima linie și în prima coloană a diagramei obținute prin suprimarea celor a_1 căsuțe, cu a_3 numărul de căsuțe care se găsesc în prima linie și în prima coloană a diagramei obținute după suprimarea celor a_2 căsuțe ș.a.m.d.

Se obțin astfel k numere impare $a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ care realizează o partiție a lui n: $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

De exemplu, pentru partiția lui $n = 30$ cu diagrama Ferrers simetrică din fig. 5.3.:

$$30 = 7 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2$$

obținem $a_1 = 13$, $a_2 = 11$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$, care corespund partiției lui 30 cu 4 părți impare: $30 = 13 + 11 + 5 + 1$.

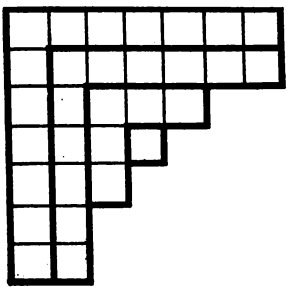


Fig. 5.3.

Este clar că această corespondență este injectivă.

Pentru a arăta că ea este surjectivă, plecînd de la o partiție a lui $n = a_1 + \ldots + a_k$ cu k părți impare diferite două cîte două, vom construi o diagramă Ferrers simetrică punînd a_1 căsuțe în prima linie și în prima coloană, a_2 căsuțe în a II-a linie și a II-a coloană, ..., a_k căsuțe în locurile libere din linia și coloana de indice k. Imaginea, prin corespondența descrisă, a acestei partiții cu diagramă simetrică este tocmai parti-

ția lui n în părți impare de la care am plecat, ceea ce demonstrează surjectivitatea, deci bijectivitatea acestei corespondențe.

Numărul partițiilor lui n cu termeni impari distincți doi cîte doi este coeficientul lui x^n din produsul

$$(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)...$$

Într-adevăr, pentru a obține un termen egal cu x^n din această dezvoltare trebuie să înmulțim din anumite paranteze termeni de forma x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_k} unde $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$, $a_1, ..., a_k$ sînt numere impare distincte două cîte două și $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_k$ pentru a nu număra același monom de mai multe ori.

Coeficientul fiecărui produs de forma $x^{a_1} ... x^{a_k}$ fiind egal cu 1, rezultă că coeficientul lui x^n este egal cu numărul partițiilor lui n cu termeni impari diferiți doi cîte doi.

Pentru a obține funcția generatoare a numărului de diagrame Ferrers simetrice cu k căsuțe pe diagonală vom suprima pătratul avînd latura de k căsuțe situat în colțul din stînga sus al diagramei.

Vom considera în continuare numărul de căsuțe din linia i plus numărul de căsuțe din coloana i ($i \geqslant k + 1$) ca un nou termen al unei partiții a lui n într-un termen egal cu k^2 și o serie de alți termeni mai mici sau egali cu $2k$. Pentru diagrama din figura 5.3 această nouă partiție se scrie:

$$30 = 4^2 + 6 + 4 + 4.$$

Obținem astfel că numărul partițiilor întregului n cu diagrama Ferrers simetrică avînd pe diagonală k căsuțe este egal cu numărul partițiilor lui n de forma:

$$n = k^2 + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_r,$$

unde $k \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_r$.

Analog ca mai înainte, găsim că numărul acestor partiții ale lui n este egal cu coeficientul lui x^n din dezvoltarea produsului:

$$x^{k^2}(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^4 + x^8 + ...) ... (1 + x^{2k} + x^{4k} + ...) =$$

$$= \frac{x^{k^2}}{(1 - x^2)(1 - x^4) ... (1 - x^{2k})}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, să arătăm că numărul partițiilor lui $m = n - k^2$ în părți pare mai mici sau egale cu $2k$ este coeficientul lui x^m din dezvoltarea produsului:

$$(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^4 + x^8 + ...) ... (1 + x^{2k} + x^{4k} + ...).$$

Pentru aceasta vom pleca de la dezvoltarea:

$$\frac{1}{(1 - a_1x^2)(1 - a_2x^4) ... (1 - a_kx^{2k})} = (1 + a_1x^2 + a_1^2x^4 + ...)(1 + a_2x^4 +$$

$$+ a_2^2x^8 + ...) ... (1 + a_kx^{2k} + a_k^2x^{4k} + ...) = 1 + a_1x^2 + (a_1^2 + a_2)x^4 +$$

$$+ ... + (a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2} ... a_k^{\lambda_k} + ...)x^m + ...$$

Termenul $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2} ... a_k^{\lambda_k}$ care compune coeficientul lui x^m are proprietatea:

$$2\lambda_1 + 4\lambda_2 + ... + 2k\lambda_k = m,$$

deci el definește o partiție a întregului m de forma:

$$\underbrace{2k + \ldots + 2k}_{\lambda_k} + \ldots + \underbrace{4 + \ldots + 4}_{\lambda_2} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{\lambda_1}.$$

Rezultă că exponenții literelor care apar în coeficientul lui x^m generează fără repetiție toate partițiile lui m cu părți pare, ținînd seama de modul de desfacere a parantezelor. Deci dacă facem $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, coeficientul lui x^m va fi egal cu numărul partițiilor lui m în părți pare, mai mici sau egale cu $2k$, ceea ce justifică expresia funcției generatoare obținute pentru numărul diagramelor Ferrers simetrice cu k căsuțe pe diagonală.

Deci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}$$

reprezintă funcția generatoare a numărului de diagrame Ferrers simetrice cu n căsuțe, ceea ce demonstrează prima identitate.

Pentru a demonstra identitatea lui Euler să observăm, analog cu discuția pentru funcția generatoare a numărului partițiilor lui n în părți impare și distincte două cîte două, că numărul partițiilor lui n cu k termeni impari distincți doi cîte doi este coeficientul lui $x^n y^k$ din dezvoltarea produsului:

$$(1 + xy)(1 + x^3y)(1 + x^5y)$$

Pe de altă parte, am văzut că există o bijecție de la mulțimea partițiilor lui n cu diagrame Ferrers simetrice și k căsuțe pe diagonală, pe mulțimea partițiilor lui n cu k termeni impari și diferiți doi cîte doi. Deci numărul partițiilor lui n în k termeni impari distincți doi cîte doi este coeficientul lui x^n din (1), sau coeficientul lui $x^n y^k$ din

$$\frac{x^{k^2} y^k}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

Obținem deci identitatea:

$$(1 + xy)(1 + x^3y)(1 + x^5y)\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2} y^k}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

Dacă în această identitate facem $y = x$ mai obținem identitatea următoare:

$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^6)\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2+k}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

6. ARBORI

6.1. Între oricare două vîrfuri ale unui arbore există un lanț unic care le unește.

Subgraful indus de B nu conține cicluri, deoarece nici A nu conține cicluri. Dacă $x, y \in B$ și $x \neq y$ atunci x, y sînt vîrfuri ale fiecărui subarbore $A_1, \ldots, A_p$, deci fiecare din acești subarbori conțin lanțul unic $[x, z_1, \ldots, z_k, y]$ care îl unește pe x cu y în A.

Deci $z_1, \ldots, z_k \in X_1, \ldots, X_p$ sau $z_1, \ldots, z_k \in B$, ceea ce demonstrează că subgraful indus de mulțimea de vîrfuri B este și conex, deci este arbore.

6.2. Demonstrația se poate face prin inducție după numărul de vîrfuri ale arborelui G.
Dacă G are două vîrfuri, proprietatea este imediată. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult n vîrfuri și fie G un arbore cu $n+1$ vîrfuri. G conține un vîrf x de gradul 1, adiacent cu un vîrf y.
Conform ipotezei de inducție proprietatea este adevărată pentru subarborele G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiei $[x, y]$.
Dacă nici unul din subarborii $G_1, \ldots, G_k$ nu este graful format numai din vîrful x, atunci toți subarborii $G_1^x, \ldots, G_k^x$ obținuți din $G_1, \ldots, G_k$ prin suprimarea vîrfului x au doi cîte doi cel puțin un vîrf comun. Într-adevăr, dacă x este un vîrf comun pentru G_i și G_j, atunci și y este un vîrf comun pentru G_i și G_j, deci și pentru G_i^x și G_j^x. Prin ipoteza de inducție $G_1^x, \ldots, G_k^x$ au cel puțin un vîrf comun, deci și subarborii $G_1, \ldots, G_k$ au aceeași proprietate. Dacă de exemplu G_1 este format numai din vîrful x, atunci x este comun tuturor subarborilor $G_1, \ldots, G_k$ și proprietatea este iarăși verificată.

6.3. Vom demonstra prin inducție după n că un arbore cu n vîrfuri are $n-1$ muchii. Dacă $n=1$ arborele are un vîrf și nici o muchie. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu n vîrfuri și fie A un arbore cu $n+1$ vîrfuri.
A conține cel puțin un vîrf de gradul 1, deoarece în caz contrar A ar conține un ciclu, ceea ce contrazice definiția unui arbore. Într-adevăr, fie

$$L = [x_1, \ldots, x_k]$$

un lanț elementar de lungime maximă al lui A.
Deoarece $d(x_k) \geqslant 2$, rezultă că x_k este adiacent cu cel puțin unul dintre vîrfurile $x_1, \ldots, x_{k-2}$, în caz contrar obținîndu-se un lanț mai lung decît L, ceea ce contrazice maximalitatea lui L. Se obține deci un ciclu care trece prin vîrful x_k.
Am arătat că A conține un vîrf de gradul 1. Fie $d(x) = 1$ și y vîrful adiacent cu x. Dacă suprimăm vîrful x și muchia $[x, y]$ se obține un subgraf A_1 care este conex și fără cicluri, deci este un arbore. Conform ipotezei de inducție A_1 are n vîrfuri și $n-1$ muchii, deci A are $n+1$ vîrfuri și n muchii și proprietatea enunțată este demonstrată.
Necesitatea condiției din problemă este acum imediată, deoarece $d_1 + \ldots + d_n = 2m = 2n - 2$, unde cu m am notat numărul de muchii ale unui arbore A cu n vîrfuri.
Să presupunem acum că $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$.
Vom folosi inducția după n. Pentru $n = 1$ rezultă $d_1 = 0$ și pentru $n = 2$ obținem $d_1 = d_2 = 1$, deci arborii sînt K_1, respectiv K_2. Să presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$ întregi și să o demonstrăm pentru întregii $d_1, \ldots, d_n$ a căror sumă este $2n-2$ și $n \geqslant 3$. Obținem $d_1 = 1$, deoarece $d_1 \geqslant 2$ implică $d_1 + \ldots + d_n \geqslant 2n > 2n - 2$. La fel $d_n > 1$ deoarece $d_n = 1$ ar implica $d_1 + \ldots + d_n = n < 2n - 2$.
Avem $d_2 + \ldots + d_{n-1} + (d_n - 1) = 2n - 4 = 2(n-1) - 2$ și conform ipotezei de inducție există un arbore A avînd $n-1$ vîrfuri și gradele $d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n - 1$.
Vom adăuga la arborele A un nou vîrf pe care îl unim cu vîrful lui A avînd gradul $d_n - 1$.
Obținem astfel un arbore cu gradele $d_1, \ldots, d_n$.

6.4. Dacă U_1 este mulțimea muchiilor arborelui A_1 și U_2 este mulțimea muchiilor arborelui A_2, fie $u \in U_1 \setminus U_2$. Dacă suprimăm muchia u din arborele A_1, se obține un graf G_1 care conține două componente conexe C_1 și C_2.

Într-adevăr, dacă graful obținut ar conține cel puțin trei componente conexe, atunci prin adăugarea muchiei u între două vîrfuri situate în componente diferite graful obținut nu ar fi conex, deci A_1 nu este conex, ceea ce contrazice definiția unui arbore.

Pe de altă parte, am văzut că orice arbore cu n vîrfuri are $n - 1$ muchii (problema 6.3), deci prin suprimarea unei muchii u graful obținut G_1 nu este conex, avînd $n - 2$ muchii.

Există o muchie $v \in U_2$ care unește două vîrfuri situate în componentele C_1 și C_2.

Într-adevăr, în caz contrar ar rezulta că muchiile arborelui A_2 unesc numai perechi de vîrfuri situate fie în C_1, fie în C_2, ceea ce implică faptul că A_2 nu este conex. Însă A_2 fiind arbore el este conex, deci există o muchie $v \in U_2$ care unește vîrfuri situate în componentele C_1 și C_2. Deoarece G_1 nu conține cicluri, rezultă că și graful obținut din G_1 prin adăugarea muchiei v nu conține cicluri și este conex, deci este un arbore B_2.

B_2 este un arbore parțial al lui G care are mai multe muchii în comun cu A_2 decît A_1. Repetînd această transformare, înlocuim toate muchiile $u \in U_1 \setminus U_2$ prin muchii din U_2, deci ajungem la un arbore $B_r = A_2$, unde $r \geqslant 2$.

6.5. 1) Să arătăm că dacă suprimăm toate vîrfurile de gradul 1 ale arborelui G, atunci $e(x)$ descrește cu o unitate pentru toate vîrfurile subgrafului astfel obținut.

Toate vîrfurile la distanța $e(x)$ de x sînt de gradul 1, deci prin suprimarea acestora $e(x)$ descrește pentru toate vîrfurile rămase. Se mai observă că prin această operație $e(x)$ descrește cu exact o unitate, deoarece cel mai lung lanț care pleacă din x se termină într-un vîrf de gradul 1 al lui G, care este apoi suprimat. Proprietatea fiind adevărată pentru grafurile cu un singur vîrf, să presupunem că ea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult $n - 1$ vîrfuri.

Să presupunem că arborele G are $n \geqslant 2$ vîrfuri.

Să notăm cu C mulțimea vîrfurilor x care formează centrul lui G, deci pentru care $e(x)$ este minim. Dacă C nu conține nici un vîrf de gradul 1, să suprimăm toate vîrfurile de gradul 1 ale arborelui G. Deoarece pentru toate vîrfurile rămase x, valoarea $e(x)$ scade cu o unitate, rezultă că prin această operație se obține un nou arbore G' cu același centru C. Deoarece G' are cel mult $n - 2$ vîrfuri, rezultă conform ipotezei de inducție că C este format dintr-un vîrf sau din două vîrfuri adiacente și proprietatea 1) este demonstrată. Dacă C conține un vîrf x de gradul $d(x) = 1$, rezultă că x este adiacent cu un singur vîrf y. Este clar că y este strict mai apropiat decît x de oricare alt vîrf al lui G. Deci $e(x)$ poate fi minim numai dacă $e(x) = 1$ și G este un arbore format din x și y legate printr-o muchie. În acest caz $C = \{x, y\}$ și proprietatea este demonstrată.

Conform problemei 8.4, lanțurile de lungime maximă ale unui arbore au o intersecție nevidă. Se poate arăta că această intersecție conține centrul arborelui.

2) Fie L un lanț de lungime $e(x)$ care pleacă din x. Dacă L nu conține nici pe y, nici pe z, atunci:

$$e(y) = e(x) + 1, \quad e(z) = e(x) + 1$$

și obținem $2e(x) < e(y) + e(z)$.

L nu poate conține și pe y și pe z, deoarece ambele vîrfuri sînt vecine cu x.

Dacă de exemplu L conține pe y, obținem:

$$e(y) \geqslant e(x) - 1, \quad e(z) = e(x) + 1$$

și deci $2e(x) \leqslant e(y) + e(z)$.

3) Se arată ușor că distanța astfel definită pe mulțimea vîrfurilor unui graf conex este o metrică pe această mulțime și deci ea satisface inegalitatea triunghiului.

Fie x, y două vîrfuri astfel încît $d(x, y) = d(G)$ și z un vîrf de excentricitate minimă, egală cu $\rho(G)$. Putem scrie:

$$d(G) = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \leqslant \rho(G) + \rho(G) = 2\rho(G).$$

6.6. Fie $L = [x_1, \ldots, x_{2k-2}]$ un lanț de lungime $2k - 3$ al unui arbore A. Pentru orice vîrf y care nu se găsește pe L îi vom asocia un lanț L_y în modul următor:

Fie M lanțul care unește pe y de un vîrf z al lui L și care are în comun cu L numai extremitatea z. Dacă M are o lungime mai mare decît $k - 1$, fie L_y sublanțul lui M de lungime k, de extremitate y.

În caz contrar, L_y constă din M și dintr-un sublanț al lui L.

O astfel de construcție este întotdeauna posibilă, deoarece L are lungimea $2k - 3$, deci există un sublanț al lui L incident cu o extremitate a lui M și care are lungimea $k - 1$. Într-adevăr, în caz contrar L ar avea lungimea mai mică sau egală cu $2(k - 2)$, ceea ce contrazice ipoteza.

În plus, L conține sublanțurile: $[x_1, \ldots, x_{k+1}], \ldots, [x_{k-2}, \ldots, x_{2k-2}]$ de lungime k.

Obținem un număr de $n - (2k - 2) + k - 2 = n - k$ lanțuri diferite două cîte două, de lungime egală cu k.

6.7. Dacă arborele G are mulțimea vîrfurilor X de cardinal n, rezultă că are $n - 1$ muchii.

Deci în suma $\sum_{x,y \in X} d(x, y)$ există exact $n - 1$ termeni egali cu 1, restul termenilor nenuli fiind cel puțin egali cu 2. Dacă G este o stea (graful $K_{1,n-1}$), toți termenii diferiți de 0 (pentru $x = y$) și de 1 au valoarea 2. Dacă G nu este stea, există cel puțin un termen egal cu 3, deci minimul căutat se atinge numai pentru arborele $K_{1,n-1}$. Pentru a găsi maximul acestei sume să arătăm că $s(x)$ este maxim în mulțimea vîrfurilor terminale ale unui arbore numai atunci cînd arborele G este un lanț și x este una din extremitățile sale. Dacă L este un lanț cu n vîrfuri și x una dintre extremități, avem

$$s(x) = 1 + 2 + \ldots + (n - 1).$$

G fiind un arbore și x un vîrf terminal cu $e(x) = d$, va exista cel puțin cîte un vîrf la distanța $1, 2, \ldots, d$ de x. Ținînd seama de definiția lui $s(x)$, rezultă că suma care definește pe $s(x)$ are forma:

$$s(x) = 1 + 2 + \ldots + d + d_1 + \ldots + d_{n-1-d},$$

unde $d_1, \ldots, d_{n-1-d} \leqslant d$. Comparînd cu expresia lui $s(x)$ în cazul lanțului L, găsim că maximul lui $s(x)$ se atinge numai în cazul cînd $d = n - 1$, adică G este un lanț și x este una dintre extremitățile sale. Să demonstrăm prin inducție după n că $\sum_{x,y \in X} d(x, y)$ este maximă în mulțimea arborilor G cu n vîrfuri din mulțimea X atunci cînd G este un lanț. Pentru $1 \leqslant n \leqslant 3$ proprietatea este imediată, deoarece orice arbore cu n vîrfuri, unde n este cuprins

în acest interval, este un lanț. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult $n-1$ vîrfuri și fie G un arbore cu n vîrfuri care formează mulțimea X. Dacă a este un vîrf de gradul 1 al arborelui G, obținem:

$$\sum_{x,y \in X} d(x, y) = s(a) + \sum_{x,y \in Y} d(x, y),$$

unde $Y = X \setminus \{a\}$.
Primul termen $s(a)$ este maxim numai dacă G este un lanț și a este una din extremitățile sale. În acest caz și al doilea termen este maxim, aplicînd ipoteza de inducție subarborelui cu $n-1$ vîrfuri care formează mulțimea Y.

6.8. 1) Să notăm cu G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x. Deoarece G este arbore, rezultă că G_x nu este conex și y și z se găsesc în componente conexe diferite ale lui G_x, care conțin respectiv k_1 și k_2 vîrfuri. Avem $k_1 + k_2 \leqslant n - 1$.
Din definiția funcției $s(x)$ rezultă că deplasîndu-ne de la x la y ne apropiem cu o unitate de k_1 vîrfuri, dar ne depărtăm cu cîte o unitate de $n - k_1$ vîrfuri. Putem deci scrie:

$$s(x) \geqslant s(y) + k_1 - (n - k_1) = s(y) + 2k_1 - n.$$

În mod analog găsim:

$$s(x) = s(z) + 2k_2 - n,$$

care prin sumare ne dau:

$$2s(x) = s(y) + s(z) + 2(k_1 + k_2 - n) \leqslant s(y) + s(z) - 2.$$

2) Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două vîrfuri neadiacente x și y astfel încît $s(x) = s(y) = \text{minimum}$.
Fie $[x, x_1, x_2, \ldots, x_p, y]$ lanțul unic care unește în arbore vîrfurile x și y cu $p \geqslant 1$.
Conform ipotezei $s(x_1) \geqslant s(x)$. Inegalitatea demonstrată la 1) ne conduce la:

$$s(x) + s(x_2) > 2s(x_1) \geqslant s(x_1) + s(x), \text{ deci}$$

$$s(x_2) > s(x_1) \geqslant s(x). \text{ La fel:}$$

$s(x_1) + s(x_3) > 2s(x_2) > s(x_1) + s(x_2)$, deci $s(x_3) > s(x_2) > s(x_1) \geqslant s(x)$ ș.a.m.d.
În final găsim $s(y) > s(x_p) > \ldots > s(x_1) \geqslant s(x)$, ceea ce contrazice egalitatea $s(x) = s(y)$, deoarece $p \geqslant 1$.
Punctele în care $s(x)$ își atinge minimul formează *baricentrul* arborelui G. Considerînd un lanț cu un număr impar (respectiv număr par) de vîrfuri, se observă că baricentrul poate fi format dintr-un singur vîrf sau din două vîrfuri adiacente.
Dacă $x_1, \ldots, x_p$ sînt vîrfurile unui lanț și $y_1, \ldots, y_q$ alte vîrfuri legate prin cîte o muchie de x_1, se observă că dacă p este par, atunci centrul arborelui astfel obținut este vîrful $x_{\frac{p}{2}}$.

Dacă q este suficient de mare, de exemplu $q = \binom{p}{2}$, baricentrul arborelui este x_1, iar distanța dintre centru și baricentru este $\frac{p}{2} - 1$, care poate lua valori oricît de mari pentru p suficient de mare.

6.9. Să considerăm trei indici $i, j, k \in \{1, ..., r\}$ și diferiți doi cîte doi. (Dacă de exemplu $i = j$ obținem $d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} = 0$ și 1) este verificată).

Deoarece A este arbore, între nodurile terminale x_i și x_j există un lanț $L_{ij} = [x_i, ..., x_j]$ unic și un nod $v \in L_{ij}$ astfel încît lanțul unic de la v la x_k nu are alte noduri comune cu L_{ij} în afara extremității v.

Putem scrie:

$$d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) - d(x_i, x_k) = 2d(x_j, v),$$

ceea ce implică 1).

Să considerăm $i, j, k, l \in \{1, ..., r\}$, diferiți doi cîte doi. Dacă de exemplu $i = j$ cele trei numere devin d_{kl}, $d_{ki} + d_{il}$, $d_{ki} + d_{il}$, deci două sînt egale și al treilea verifică inegalitatea:

$$d_{kl} \leqslant d_{ki} + d_{il}.$$

Într-adevăr, distanța definită între vîrfurile unui graf are proprietățile unei metrici, deci verifică inegalitatea triunghiului.

Fie L_{ij} și L_{kl} lanțurile care unesc vîrfurile x_i și x_j, respectiv x_k și x_l. Aceste lanțuri pot avea 0, 1 sau cel puțin 2 vîrfuri în comun.

Dacă lanțurile nu au nici un vîrf în comun, fie u un vîrf al lanțului L_{ij} și v un vîrf al lanțului L_{kl}, astfel încît lanțul unic de extremități u și v să aibă în comun cu lanțurile L_{ij} și L_{kl} numai extremitățile u și v. (fig. 6.2).

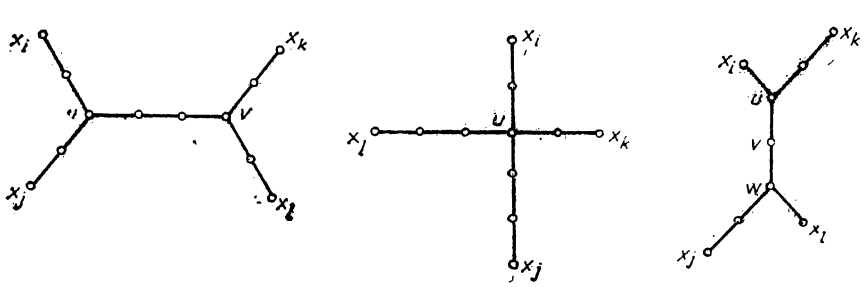


Fig. 6.2.

În acest caz putem scrie:

$$d_{ik} + d_{jl} = d_{il} + d_{jk} = d_{ij} + d_{kl} + 2d(u, v),$$

ceeace demonstrează afirmația 2).

Dacă L_{ij} și L_{kl} au exact un vîrf u în comun, obținem $d_{ij} + d_{kl} = d_{ik} + d_{jl} = d_{il} + d_{jk}$.

Dacă lanțurile L_{ij} și L_{kl} au cel puțin 2 vîrfuri u, v în comun (fig. 6.2), atunci 2) este de asemenea adevărată, deoarece dacă notăm cu u și w extremitățile sublanțului comun celor două lanțuri, putem scrie:

$$d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{jk} = d_{ik} + d_{jl} + 2d(u, w).$$

Se poate arăta prin inducție după $r \geqslant 2$ că dacă $(d_{ij})_{i,j=1,...,r}$ este o matrice simetrică formată din numere întregi nenegative astfel încît $d_{ij} = 0$ dacă și numai dacă $i = j$ și care satisfac 1) și 2), atunci există un arbore A cu r noduri terminale $x_1, ..., x_r$ astfel ca $d(x_i, x_j) = d_{ij}$ pentru $i, j = 1, ..., r$.

(K.A. Zaretskii, Uspehi Matem. Nauk., 20(1965), 6, 94—96).

6.10. Vom demonstra proprietatea prin inducție după r. Pentru $r = 2$ proprietatea este imediată, deoarece orice arbore cu exact 2 vîrfuri terminale este un lanț elementar, iar $d_A(1, 2) = d_B(1, 2)$ ne arată că cele două lanțuri au același număr de vîrfuri, deci sînt izomorfe.

Fie $r > 2$ și să presupunem proprietatea adevărată pentru toți arborii cu cel mult $r - 1$ vîrfuri terminale. Să notăm că v_A vîrful de grad mai mare sau egal cu 3 din arborele A, cel mai apropiat de vîrful terminal cu eticheta r și cu v_B vîrful cu aceleași proprietăți din arborele B. Rezultă că există un lanț elementar $[v_A, ..., r]$ în arborele A, unde toate vîrfurile situate între v_A și r au toate gradul 2 în graful A (mulțimea lor poate fi eventual vidă) și un lanț elementar $[v_B, ..., r]$ cu aceleași proprietăți în arborele B.

Să suprimăm vîrfurile terminale cu eticheta r precum și toate vîrfurile interioare lanțurilor $[v_A, ..., r]$, respectiv $[v_B, ..., r]$ din arborii A și B. Se obțin astfel arborii A_1 și B_1 care au fiecare cîte $r - 1$ vîrfuri terminale cu etichetele din mulțimea $\{1, ..., r - 1\}$. Distanțele dintre vîrfurile terminale i și j sînt aceleași în A și B pentru $1 \leqslant i < j \leqslant r - 1$ și deci ele vor rămîne neschimbate pentru arborii A_1 și B_1.

Conform ipotezei de inducție A_1 și B_1 sînt arbori izomorfi, deci există o bijecție f de la mulțimea vîrfurilor lui A_1 pe mulțimea vîrfurilor lui B_1 care păstrează adiacența vîrfurilor.

Putem presupune că $f(i) = i$ pentru $i = 1, ..., r - 1$, în caz contrar reetichetînd vîrfurile terminale ale lui B_1 astfel încît această condiție să fie verificată și distanțele dintre nodurile terminale i și j să fie aceleași pentru A_1 și B_1. Să demonstrăm că $f(v_A) = v_B$. Să presupunem prin reducere la absurd că $f(v_A) \neq v_B$. Există în B_1 un lanț unic care unește pe $f(v_A)$ cu v_B, pe care îl prelungim într-un mod oarecare la un lanț care unește nodurile terminale i și j în B_1 $(1 \leqslant i < j \leqslant r - 1)$. Putem scrie:

$$d_B(i, j) + d_B(i, r) - d_B(j, r) = 2d_B(i, v_B)$$

și deoarece $f(v_A)$ se găsește pe lanțul care unește pe i cu j în B_1, care este izomorf cu A_1, rezultă că v_A se găsește pe lanțul care îl unește pe i cu j în A_1, deci putem scrie de asemenea:

$$d_A(i, j) + d_A(i, r) - d_A(j, r) = 2d_A(i, v_A).$$

Deoarece distanțele dintre vîrfurile terminale sînt egale pentru arborii A și B, rezultă că avem și $d_B(i, v_B) = d_A(i, v_A)$. Dar $d_B(i, v_B) = d_{B_1}(i, v_B)$ și $d_A(i, v_A) = d_{A_1}(i, v_A)$. Deoarece A_1 și B_1 sînt izomorfi prin f, rezultă că $d_{A_1}(i, v_A) = d_{B_1}(i, f(v_A)) = d_{B_1}(i, v_B)$, ceea ce este contradictoriu căci $f(v_A) \neq v_B$ și vîrfurile $f(v_A)$, v_B și i se găsesc pe același lanț. În concluzie $f(v_A) = v_B$. Fie i, j cu $1 \leqslant i < j \leqslant r - 1$ etichetele a două noduri terminale astfel încît v_A și $f(v_A) = v_B$ să se găsească pe lanțul de extremități i și j în A_1, respectiv B_1, deci în A și B.

Putem scrie:

$$d_A(r, i) + d_A(r, j) - d_A(i, j) = 2d_A(r, v_A)$$

$$d_B(r, i) + d_B(r, j) - d_B(i, j) = 2d_B(r, v_B).$$

Deoarece conform ipotezei membrii stîngi sînt egali, rezultă că $d_A(r, v_A) = d_B(r, v_B)$, deci lanțurile $[v_A, ..., r]$ respectiv $[v_B, ..., r]$ au o aceeași lungime. Dacă $[v_A, ..., r] = [v_A, x_1, ..., x_k, r]$ și $[v_B, ..., r] = [v_B, y_1, ..., y_k, r]$, vom defini izomorfismul g dintre A și B astfel: $g(x) = f(x)$ pentru orice vîrf x al arborelui A; $g(x_1) = y_1, ..., g(x_k) = y_k$; $g(r) = r$.

(E.A. Smolenskii, Jurnal Vîcisl. Mat. i Matem. Fiz. (1962), 871—872).

6.11. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul vîrfurilor. Dacă $|X| = 1$ sau 2 proprietatea este imediată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice arbore cu cel mult $n-1$ vîrfuri și să o demonstrăm pentru un arbore G cu $n \geqslant 3$ vîrfuri. Dacă f este o bijecție atunci $f(x) \neq f(y)$ pentru orice $x \neq y$ și $[x, y] \in U$ implică $[f(x), f(y)] \in U$, deci f este un automorfism al lui G. Orice vîrf terminal (de gradul 1) este deci dus de f tot într-un vîrf terminal.

Dacă notăm prin G' subarborele obținut din G prin suprimarea tuturor vîrfurilor terminale, rezultă că G' este nevid, deoarece $n \geqslant 3$. Notînd cu X' mulțimea vîrfurilor lui G', rezultă că $f(X') = X'$ și restricția lui f la X' are aceleași proprietăți ca f, deci f' (și în consecință f) are un punct fix sau o muchie fixă, conform ipotezei de inducție ($|X'| \leqslant n-2$). Dacă f nu este o bijecție, atunci $f(X)$ este o submulțime proprie de vîrfuri ale lui G. Aceste vîrfuri induc un subgraf conex al lui G din condiția impusă lui f, deci $f(X)$ este mulțimea vîrfurilor unui arbore și $|f(X)| \leqslant n-1$.

Deoarece $f(f(X)) \subset f(X)$, putem considera restricția lui f la subarborele generat de mulțimea de vîrfuri $f(X)$, care are aceleași proprietăți ca f. Conform ipotezei de inducție această restricție, deci și f, are un punct fix sau o muchie fixă.

Proprietatea nu mai este adevărată dacă G conține cicluri. De exemplu, dacă $G = K_3$ conține vîrfurile x, y, z, să definim $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = x$. În acest caz aplicația f nu are nici puncte fixe, nici muchii fixe.

6.12. Am văzut (problema 6.5) că orice arbore are un centru u sau două centre adiacente u și v. Vom demonstra prin inducție după numărul m al vîrfurilor din X că dacă arborele A are un singur centru u atunci $f(u) = u$ și dacă A are două centre u și v atunci $f(u) = u$ și $f(v) = v$ sau $f(u) = v$ și $f(v) = u$. Deoarece bijecția f păstrează adiacența vîrfurilor, rezultă că vîrfurile x și $f(x)$ au un același grad în arborele A.

Dacă $m = 1$ arborele se reduce la centrul u și $f(u) = u$; pentru $m = 2$ arborele se reduce la două centre adiacente u și v și proprietatea este iarăși adevărată. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult $m-1$ vîrfuri ($m \geqslant 3$) și fie A un arbore cu m vîrfuri. Dacă $x_1, \ldots, x_r$ sînt toate vîrfurile terminale ale arborelui A, rezultă că $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ sînt vîrfuri de gradul 1, deci constituie o permutare a mulțimii vîrfurilor terminale. Dacă considerăm restricția funcției f la mulțimea vîrfurilor de grad cel puțin 2 ale lui A:

$$g : X_r \to X_r, \text{ unde } X_r = X \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$$

și $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X_r$, rezultă că g este un automorfism al subarborelui A_r al lui A, cu mulțimea de vîrfuri X_r. Însă din rezolvarea problemei 6.5 am văzut că A și A_r au aceleași centre. Aplicînd și ipoteza de inducție, rezultă că A are un centru unic u și $g(u) = f(u) = u$, sau A are două centre adiacente u și v și $g(u) = f(u) = u$ și $g(v) = f(v) = v$, sau $g(u) = f(u) = v$ și $g(v) = f(v) = u$.

Deci proprietatea menționată este adevărată pentru orice m. Deoarece trebuie să arătăm că f are un punct fix, singurul caz pe care trebuie să-l studiem este acela cînd A are două centre adiacente u și v și $f(u) = v$ și $f(v) = u$. Să notăm cu A_u și A_v subarborii obținuți din A prin suprimarea muchiei $[u, v]$ și care conțin vîrfurile u, respectiv v. Dacă $u_1, \ldots, u_s$ sînt vîrfurile vecine cu u în arborele A_u, deoarece f păstrează adiacența în arborele A,

rezultă că $f(u_1), \ldots, f(u_s)$ sînt vîrfurile adiacente cu v în subarborele A_v; ş.a.m.d.

Deci dacă notăm cu X_u, respectiv X_v mulţimile de vîrfuri ale arborilor A_u, respectiv A_v, rezultă că $f(X_u) = X_v$. Restricţia funcţiei f pe mulţimea X_u, notată $h : X_u \to X_v$, unde $h(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X_u$ este o bijecţie şi $[x, y]$ este muchie în arborele A_u dacă şi numai dacă $[h(x), h(y)]$ este o muchie în arborele A_v. Deci h este un izomorfism al arborilor A_u şi A_v. Rezultă că A_u şi A_v au un acelaşi număr de vîrfuri, ceea ce implică $|X| = |X_u| + |X_v| = 2|X_u|$, adică un număr par.

Dar am presupus că $|X| = 2n + 1$, deci această situaţie cînd $f(u) = v$ şi $f(v) = u$ este exclusă. Rezultă că f are cel puţin un punct fix.

6.13. Să notăm grafurile obţinute din A_1, respectiv din A_2 prin suprimarea vîrfului x şi a muchiilor incidente cu x prin $A_1 - x$, respectiv $A_2 - x$. Deoarece un arbore cu n vîrfuri are $n - 1$ muchii (problema 6.3), gradul vîrfului x în arborele A_1 este egal cu

$$d_{A_1}(x) = |X| - 1 - m(A_1 - x) \tag{1}$$

unde prin $m(A_1 - x)$ am notat numărul de muchii din graful $A_1 - x$. Analog obţinem

$$d_{A_2}(x) = |X| - 1 - m(A_2 - x) \tag{2}$$

Deoarece grafurile $A_1 - x$ şi $A_2 - x$ sînt izomorfe, rezultă că $m(A_1 - x) = m(A_2 - x)$.

Din (1) şi (2) deducem că $d_{A_1}(x) = d_{A_2}(x)$ pentru orice vîrf $x \in X$, deci arborii A_1 şi A_2 au aceleaşi vîrfuri terminale (de gradul unu). Fie T mulţimea vîrfurilor terminale pentru arborii A_1 şi A_2. Dacă $|T| = 2$, rezultă că A_1 şi A_2 sînt lanţuri de lungime $|X| - 1$, deci A_1 şi A_2 au acelaşi diametru.

Să presupunem că $|T| \geqslant 3$. Fie L un lanţ elementar de lungime maximă în arborele A_1, lungime care este egală prin definiţie cu $d(A_1)$, diametrul lui A_1.

Extremităţile acestui lanţ sînt două vîrfuri terminale din mulţimea T. Mulţimea T mai conţine cel puţin un alt vîrf terminal x care nu aparţine lanţului L. Conform ipotezei, $A_2 - x$ este izomorf cu $A_1 - x$. Deoarece lanţul L este conţinut în graful $A_1 - x$, rezultă că graful $A_2 - x$ conţine un lanţ elementar L_1 de aceeaşi lungime cu lanţul L. Deci şi graful A_2 va conţine lanţul elementar L_1 de aceeaşi lungime cu L. Deducem că $d(A_2) \geqslant d(A_1)$.

Schimbînd rolul arborilor A_1 şi A_2 în raţionamentul anterior deducem că $d(A_1) \geqslant d(A_2)$, deci arborii A_1 şi A_2 au acelaşi diametru.

Se poate demonstra că în condiţiile date arborii A_1 şi A_2 sînt izomorfi. (P. J. Kelly, Pacific J. Math., 7(1957), 961—968).

6.14. Din arborele G vom obţine o arborescenţă considerînd vîrful x_1 rădăcină şi orientînd toate muchiile arborelui astfel încît în orice vîrf să sosească un drum unic care porneşte din x_1.

În acest mod am definit o relaţie de ordine parţială pe mulţimea X: vom scrie $x_i \leqslant x_j$ dacă drumul unic de la x_1 la x_j conţine vîrful x_i.

Dacă definim matricea $Z = (z_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ prin: $z_{ij} = 1$ dacă $x_i \leqslant x_j$ şi $z_{ij} = 0$ dacă x_i nu este mai mic sau egal cu x_j, am văzut la rezolvarea problemei 2.16 că putem renumerota elementele din X astfel încît Z să aibă o formă superior diagonală cu $z_{ii} = 1$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Deci $\det Z = 1$.

Vom nota:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \dots & & -2 \end{pmatrix}$$

și vom arăta că $Z^TAZ = D$.

Într-adevăr, elementul de pe linia i și coloana j ale matricei Z^TAZ este:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} z_{ki} a_{kl} z_{lj} = \sum_{x_k \leqslant x_i} \sum_{x_l \leqslant x_j} a_{kl}.$$

Dar $a_{kl} \neq 0$ numai pentru $k = l$ sau $k = 1$ sau $l = 1$; deci putem scrie:

$$c_{ij} = \sum_{x_k \leqslant x_i,\ x_j} (-2) + \sum_{x_k \leqslant x_i} 1 + \sum_{x_l \leqslant x_j} 1,$$

deoarece $x_1 \leqslant x_i$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Notînd cu x_r ultimul vîrf comun al drumurilor de la x_1 la x_i și respectiv de la x_1 la x_j, la care ajungem plecînd din x_1, putem scrie:

$$c_{ij} = -2(d(x_1, x_r) + 1) + (d(x_1, x_i) + 1) + (d(x_1, x_j) + 1) =$$
$$= d(x_1, x_i) + d(x_1, x_j) - 2d(x_1, x_r) = d(x_i, x_j).$$

Deci am arătat că $Z^TAZ = D$ și în concluzie $\det D = \det A$. Adunînd pe rînd coloanele a II-a, a III-a, ..., a n-a la prima coloană a matricei A și dezvoltînd matricea obținută după prima coloană, deducem:

$$\det A = (n-1)(-2)^{n-1} - \det A, \text{ deci } \det A = -(n-1)(-2)^{n-2}.$$

(R.L. Graham, H.O. Pollak, Bell Syst. Techn. J., 50 (1971), 2495—2519).

6.15. Deoarece orice arbore are cel puțin două vîrfuri terminale, rezultă că la sfîrșitul procedurii descrise obținem un arbore format numai din vîrful x_n și un alt vîrf adiacent cu x_n. Vom completa codul lui Prüfer al lui A cu o nouă poziție $a_{n-1} = n$.

Fie $b_1, \dots, b_{n-1}$ indicii vîrfurilor terminale suprimate în cursul aplicării algoritmului de determinare a codului lui Prüfer al arborelui A.

Vom arăta cum se pot determina numerele b_i dacă cunoaștem codul Prüfer $(a_1, \dots, a_{n-1})$. Este clar că b_i este diferit de $b_1, \dots, b_{i-1}$ și de asemenea de a_i, deoarece $[x_{a_i}, x_{b_i}]$ este o muchie a arborelui A. Vîrful x_{b_i} fiind suprimat, el nu mai poate fi vecinul unui vîrf terminal la un pas ulterior, deci $b_i \neq a_j$ pentru $j > i$.

Reciproc, dacă $k \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$, vîrful x_k este un vîrf terminal al arborelui $A - \{x_{b_1}, \dots, x_{b_{i-1}}\}$ obținut din A prin suprimarea vîrfurilor de indici $b_1, \dots, b_{i-1}$.

Într-adevăr, în caz contrar el ar trebui să fie adiacent cu un vîrf care va fi suprimat la un pas ulterior, deci am obține $k \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Obținem deci:

$$b_i = \min \{k \mid k \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}\} \tag{1}$$

Deci codul lui Prüfer determină în mod unic numerele b_i, deci arborele A, care este format cu muchiile $[x_{a_i}, x_{b_i}]$.

Rezultă că corespondența prin care se asociază fiecărui arbore codul său Prüfer este injectivă.

Fie acum $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ un șir oarecare de numere întregi care verifică $1 \leqslant a_i \leqslant n$ și $a_{n-1} = n$. Vom defini în mod recursiv numerele b_i prin egalitatea (1) și vom uni printr-o muchie vîrfurile x_{a_i} și x_{b_i} pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

Vom arăta că graful A obținut în acest mod este un arbore al cărui cod Prüfer este tocmai $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, deci corespondența definită este și surjecție, deci bijecție.

Pentru a arăta acest lucru este suficient să demonstrăm că x_{b_i} este un vîrf terminal al grafului $A_i = A - \{x_{b_1}, \ldots, x_{b_{i-1}}\}$, care are indicele minim.

Din (1) rezultă că $b_i \neq a_j$ pentru $j > i$, deci $a_i \neq b_1, \ldots, b_{i-1}$, ceea ce implică proprietatea că x_{a_i} este un vîrf al grafului A_i. Prin construcție vîrfurile x_{a_i} și x_{b_i} sînt adiacente, deci x_{b_i} este adiacent cu un vîrf din A_i. Vîrful x_{b_i} nu poate fi adiacent cu un vîrf din A_i diferit de x_{a_i}, deoarece presupunînd că $[x_{a_j}, x_{b_j}]$ este o altă muchie a lui A_i incidentă cu x_{b_i}, rezultă că $j > i$ căci x_{b_j} este un vîrf al lui A_i.

Dar x_{b_i} este unul din vîrfurile x_{a_j} sau x_{b_j}, deci $b_i = b_j$ sau $b_i = a_j$, care contrazic egalitatea (1), deoarece $j > i$.

Deci x_{b_i} este un vîrf terminal al grafului A_i, deci toate grafurile A_i și A sînt arbori. Conform celor demonstrate, această proprietate rezultă prin inducție după i, deoarece pentru $i = n$ graful A_n este format din vîrful x_{b_n}, deci este arbore, iar din faptul că A_{i+1} este arbore a rezultat că și A_i este arbore.

Să presupunem acum prin reducere la absurd că A_i are un vîrf terminal x_k cu $k < b_i$.

Ținînd seama de (1), rezultă că fie $k = b_s$ cu $s < i$ sau $k = a_j$ cu $j \geqslant i$. Prima posibilitate nu poate avea loc căci x_{b_s} este un vîrf al arborelui A_i, care nu conține vîrurile $x_{b_1}, \ldots, x_{b_{i-1}}$.

Dacă $k = a_j$ cu $j \geqslant i$, deoarece $a_{n-1} = n \geqslant b_i > k$ rezultă $j \leqslant n-2$. Am demonstrat însă că x_{b_j} este un vîrf terminal al lui A_j, care este adiacent numai cu $x_{a_j} = x_k$. Însă x_k fiind un vîrf terminal al lui A_i, el este vîrf terminal și pentru A_j, căci $j \geqslant i$. Rezultă că x_{a_j} și x_{b_j} sînt ambele vîrfuri terminale ale lui A_j, deci A_j se reduce la muchia $[x_{a_j}, x_{b_j}]$. Am ajuns la o contradicție, deoarece A_j are $n - j + 1 \geqslant 3$ vîrfuri pentru că $j \leqslant n-2$.

2) Numărul arborilor cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ este deci egal cu numărul șirurilor $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ cu $1 \leqslant a_i \leqslant n$ și $a_{n-1} = n$, deci cu n^{n-2}.

3) Să observăm că fiecare vîrf x_{a_i} apare în șirul $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ de exact $d_{a_i} - 1$ ori.

Într-adevăr, indicii vîrfurilor terminale nu apar în șir, iar un vîrf x_i de grad $d_i \geqslant 2$ va deveni vîrf terminal după ce exact $d_i - 1$ vecini ai săi au fost eliminați.

Rezultă că numărul arborilor cu gradele $d(x_1) = d_1, \ldots, d(x_n) = d_n$, a căror sumă este dublul numărului de muchii, adică $2n-2$, este egal cu numărul șirurilor $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ care conțin de $d_1 - 1$ ori numărul $1, \ldots,$ de $d_n - 1$ ori numărul n. Dar acest număr este egal cu numărul de aranjări a $n-2$ obiecte în n căsuțe, astfel încît prima căsuță să conțină $d_1 - 1$ obiecte, ..., ultima căsuță să conțină $d_n - 1$ obiecte, dacă obiectele din căsuța i reprezintă numerele de ordine ale pozițiilor pe care se găsește numărul i în șirul $(a_1, \ldots, a_{n-2})$.

Conform problemei 1.15 acest număr este egal cu

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\ldots(d_n-1)!}.$$

6.16. Pentru orice arbore A cu n vîrfuri $x_1, \ldots, x_n$ dacă suprimăm o muchie oarecare obținem doi arbori disjuncți care conțin împreună toate vîrfurile lui A. Vom marca extremitățile muchiei suprimate. Deoarece A are $n-1$ muchii, plecînd de la toți cei a_n arbori cu n vîrfuri obținem $(n-1)a_n$ perechi de astfel de arbori cu cîte un vîrf marcat în fiecare arbore. Dacă A_1 și A_2 sînt doi arbori disjuncți cu k și $n-k$ vîrfuri care conțin împreună vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$, putem marca un vîrf al lui A_1 și un vîrf al lui A_2 în $k(n-k)$ moduri pentru $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Mulțimile de vîrfuri ale lui A_1 și A_2 pot fi alese în $\binom{n-1}{k-1}$ moduri cu condiția ca un vîrf fixat, fie x_1 să aparțină arborelui A_1, pentru a elimina repetițiile.

Putem găsi a_k, respectiv a_{n-k} arbori cu mulțimile de vîrfuri A_1, respectiv A_2, deci numărînd în două moduri perechile de arbori disjuncți care conțin împreună vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$ și au cîte un vîrf marcat în fiecare arbore, găsim:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a_k a_{n-k}\,k(n-k) = (n-1)a_n \tag{1}$$

Deoarece $\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n-k}\binom{n-2}{k-1}$

obținem identitatea căutată, prin împărțire cu $n-1$ în ambii membri ai lui (1).

Deoarece $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$, prin schimbarea între ei a indicilor k și $n-k$, (1) devine:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k a_{n-k}\,k(n-k) = (n-1)a_n. \tag{2}$$

Adunînd membru cu membru (1) cu (2) găsim:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,k(n-k) = 2(n-1)a_n, \tag{3}$$

identitate care se poate deduce și direct dacă nu mai fixăm vîrful x_1 în A_1.

Să arătăm că $a_n = n^{n-2}$ prin inducție după n.

Pentru $n = 1$ există un singur arbore cu un vîrf și formula se verifică. Presupunînd că $a_m = m^{m-2}$ pentru orice $1 \leqslant m \leqslant n-1$, să arătăm că $a_n = n^{n-2}$. Folosind (3), trebuie să arătăm că:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2},$$

egalitate care este identitatea 3) de la problema 1.29. Deci $a_n = n^{n-2}$.
(O. Dziobek, Sitzungsber. Berl. Math. G., 17 (1917), 64—67).

6.17. Să presupunem că vîrfurile terminale sînt fixate și ele sînt $x_1, \ldots, x_p$. Conform problemei precedente, deoarece $d_1 = \ldots = d_p = 1$, numărul căutat este:

$$\sum_{(d_{p+1}, \ldots, d_n)} \frac{(n-2)!}{(d_{p+1}-1)! \ldots (d_n-1)!} = \sum_{(k_{p+1}, \ldots, k_n)} \frac{(n-2)!}{k_{p+1}! \ldots k_n!} \qquad (1)$$

unde prima sumă se face după toate valorile

$$d_{p+1}, \ldots, d_n \geqslant 2 \text{ și } d_{p+1} + \ldots + d_n = 2n - 2 - p.$$

A II-a sumă se obține prin schimbarea de variabile $k_{p+1} = d_{p+1} - 1, \ldots, k_n = d_n - 1$, deci $k_{p+1}, \ldots, k_n \geqslant 1$ și $k_{p+1} + \ldots + k_n = n - 2$. Numărul

$$\frac{(n-2)!}{k_{p+1}! \ldots k_n!}$$

reprezintă numărul de moduri de a aranja $n-2$ obiecte în $n-p$ căsuțe astfel încît prima căsuță să conțină k_{p+1} obiecte, ..., căsuța numărul $n-p$ să conțină k_n obiecte. Deoarece $k_i \geqslant 1$ pentru $i = p+1, \ldots, n$, acest număr reprezintă de asemenea numărul funcțiilor surjective

$$f : X \to Y$$

unde $|X| = n-2$, $|Y| = n-p$ și dacă notăm $Y = \{y_{p+1}, \ldots, y_n\}$, să avem $|f^{-1}(y_i)| = k_i \geqslant 1$ pentru $p+1 \leqslant i \leqslant n$. Rezultă că suma (1) este egală cu numărul funcțiilor surjective $s_{n-2, n-p} = (n-p)!\, S(n-2, n-p)$, unde $S(n-2, n-p)$ este numărul lui Stirling de speța a doua (Problema 3.4).

Deoarece cele p vîrfuri terminale nu sînt specificate, ele pot fi alese din mulțimea celor n vîrfuri în $\binom{n}{p}$ moduri.

Deci numărul arborilor cu n vîrfuri, dintre care p vîrfuri au gradul unu, este egal cu:

$$\binom{n}{p} (n-p)!\, S(n-2,\ n-p) = \frac{n!}{p!}\, S(n-2,\ n-p).$$

(A. Rényi, Mat. Kut. Int. Közl., 4(1959), 73—85).

6.18. a) Fie $f(n)$ numărul căutat de posibilități.

Obținem $f(1) = 1$ și $f(2) = 2$, corespunzător alegerii muchiei $[x_1, y_1]$ sau respectiv a muchiilor $[x_1, x_2]$ și $[y_1, y_2]$ sau $[x_1, y_1]$ și $[x_2, y_2]$.

Dacă graful-scară are $2n$ vîrfuri, putem alege fie muchia $[x_1, y_1]$ și pentru muchiile rămase mai rămîn $f(n-1)$ posibilități de alegere, sau muchiile $[x_1, x_2]$ și $[y_1, y_2]$ și pentru muchiile rămase mai rămîn $f(n-2)$ posibilități de a fi alese.

Obținem deci:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

relație care împreună cu valorile inițiale $f(1) = 1$ și $f(2) = 2$ ne arată că $f(n) = F_n$, numărul lui Fibonacci.

b) Dacă notăm numărul arborilor parțiali ai grafului-scară cu $g(n)$, obținem $g(1) = 1$, cînd arborele parțial constă din $[x_1, y_1]$ și $g(2) = 4$, arbori care se obțin din ciclul cu patru vîrfuri dacă suprimăm pe rînd cîte o muchie a ciclului.

Pentru a stabili o relație de recurență pentru numerele $g(n)$, să considerăm un graf ca cel din figura 6.1 cu $2n+2$ vîrfuri: $x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}$.

Mulțimea arborilor săi parțiali se poate scrie sub forma:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

unde A_1 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia $[x_1, x_2]$, A_2 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia $[x_1, y_1]$, A_3 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia $[y_1, y_2]$ și A_4 este mulțimea arborilor parțiali care conțin muchiile $[x_1, x_2]$, $[x_1, y_1]$, $[y_1, y_2]$ și nu conțin muchia $[x_2, y_2]$. Este clar că aceste mulțimi sînt disjuncte două cîte două. Dacă de exemplu ar exista un arbore parțial din $A_1 \cap A_2$, acesta nu ar conține muchiile $[x_1, x_2]$ și $[x_1, y_1]$, deci vîrful x_1 ar fi izolat, ceea ce contrazice definiția unui arbore parțial.

Obținem $|A_1| = |A_2| = |A_3| = g(n)$, deoarece pentru subgraful format din vîrfurile $x_2, x_2, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}$ avem $g(n)$ posibilități de a mai forma arbori parțiali. Notînd $|A_4| = h(n+1)$, deducem:

$$g(n+1) = 3g(n) + h(n+1) \tag{1}$$

Însă considerînd graful din figura 6.1 cu $2n$ vîrfuri, notate: $x_2, y_2, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}$, mulțimea arborilor săi parțiali se poate scrie sub forma: $B_1 \cup B_2$, unde B_1 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia $[x_2, y_2]$ și B_2 este mulțimea arborilor parțiali care conțin muchia $[x_2, y_2]$.

Deci $g(n) = |B_1| + |B_2|$, deoarece $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Dar $|B_1| = g(n-1)$ și $|B_2| = |A_4|$, căci există o bijecție între aceste două mulțimi definită astfel: pentru fiecare arbore parțial din B_2, care deci conține muchia $[x_2, y_2]$, se înlocuiește această muchie printr-un lanț de lungime egală cu 3, avînd aceleași extremități: $[x_2, x_1, y_1, y_2]$ și se obține un arbore parțial din A_4.

Este clar că această corespondență este o bijecție, deci obținem:

$$g(n) = g(n-1) + h(n+1),$$

de unde ținînd seama de (1) se deduce recurența:

$$g(n+1) = 4g(n) - g(n-1). \tag{2}$$

Ecuația caracteristică a relației (2) este:

$$r^2 - 4r + 1 = 0,$$

cu soluțiile $r_1 = 2 + \sqrt{3}$ și $r_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Deci soluția generală a recurenței (2) are forma:

$$g(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

unde r_1 și r_2 se determină din sistemul:

$$C_1(2 + \sqrt{3}) + C_2(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$C_1(7 + 4\sqrt{3}) + C_2(7 - 4\sqrt{3}) = 4,$$

care are soluțiile $C_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ și $C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Deci $g(n) = \frac{1}{2\sqrt{3}}((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n)$.

(J. Sedlaček, Casopis pro pestováni matem., 2, 94 (1969), 217—221).

6.19. Dacă $D = (d_{ij})$ este matricea distanțelor unui graf conex G, proprietățile a) — d) exprimă tocmai faptul că funcția distanță este o metrică pe mulțimea vîrfurilor $\{1, ..., p\}$. Pentru a demonstra e), fie $1 \leqslant i < j \leqslant p$ astfel încît $d_{ij} = d(i, j) > 1$ și fie L un cel mai scurt lanț de la i la j, care conține cel puțin două muchii. Fie k un vîrf al lui L, diferit de extremitățile i și j. Rezultă că ambele sublanțuri ale lui L, de la i la k și de la k la j sînt sublanțuri de lungime minimă, adică $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$. Reciproc, să arătăm că orice matrice pătrată D de ordinul p, care verifică proprietățile a) — e) este matricea distanțelor unui anumit graf. Să definim graful G cu mulțimea vîrfurilor $X = \{1, ..., p\}$ și cu mulțimea muchiilor $U = \{[i, j] \mid |d_{ij} = 1\}$. Trebuie să mai arătăm că pentru oricare două vîrfuri i și j avem $d(i, j) = d_{ij}$.
Dacă $i = j$ avem $d(i, i) = 0 = d_{ii}$. Dacă $[i, j] \in U$ obținem $d(i, j) = 1 = d_{ij}$ din modul de definire a grafului G. Să presupunem deci că $i \neq j$ și $[i, j] \notin U$, deci $d_{ij} \geqslant 2$. Aplicînd în mod repetat proprietatea e), găsim întregii i_1, i_2, ..., i_k, astfel încît

$$d_{ij} = d_{ii_1} + d_{i_1i_2} + \ldots + d_{i_kj}$$

și fiecare termen din membrul drept al acestei egalități are valoarea 1. Deci $[i, i_1], [i_1, i_2], ..., [i_k, j] \in U$, ceea ce implică existența unui lanț de extremități i și j și lungime d_{ij} în G. Deci G conține și un lanț elementar de extremități i și j și lungime cel mult egală cu d_{ij}. În concluzie, graful G este conex și $d(i, j) \leqslant d_{ij}$. Dacă $d(i, j) < d_{ij}$, există un lanț elementar $[i, j_1, j_2, ..., j_m, j]$ de lungime mai mică decît d_{ij}. Existența acestui lanț implică $d_{ij_1} = d_{j_1j_2} = ... = d_{j_mj} = 1$. În acest caz d) implică $d_{ij} \leqslant d_{ij_1} + ... + d_{j_mj} < d_{ij}$, ceea ce este contradictoriu. Deci $d(i, j) = d_{ij}$ pentru orice i și j.

7. PARITATE

7.1. Dacă schimbăm semnul unei muchii negative care astfel devine pozitivă, se schimbă semnul a $n - 2$ triunghiuri care conțin acea muchie. Să presupunem că r triunghiuri pozitive devin negative și s triunghiuri negative devin pozitive, deci $r + s = n - 2$.
În graful astfel obținut numărul triunghiurilor negative este egal cu

$$n(f) + r - s \equiv n(f) + r + s = n(f) + n - 2,$$

unde congruențele sînt luate peste tot modulo 2.
Rezultă că schimbînd pe rînd semnul tuturor muchiilor negative se obțin zero triunghiuri negative, deci:

$$n(f) + p(n - 2) \equiv 0, \text{ adică}$$

$$n(f) \equiv np.$$

7.2. Să presupunem că cele 3 culori sînt a, b, c.
Orice față triunghiulară pentru care mulțimea vîrfurilor este colorată cu toate cele 3 culori are o muchie ale cărei extremități au culorile a, respectiv b. Toate celelalte fețe conțin 0 sau 2 muchii cu această proprietate. Să decupăm

toate fețele grafului planar și să numărăm muchiile cu extremități de culori a și b. Obținem:

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{f_3}+0+0+\ldots+0+2+2+\ldots+2 \equiv 0 \pmod 2$$

unde f_3 reprezintă numărul fețelor ale căror vîrfuri sînt colorate cu culorile a, b și c, deoarece fiecare muchie cu culorile a, b este numărată de 2 ori, în ambele fețe adiacente cu ea.

Deci $f_3 \equiv 0 \pmod 2$.

Această proprietate este un caz special al lemei lui Sperner din topologia algebrică, care este echivalentă cu o proprietate analoagă pentru triangulațiile cu n dimensiuni. Rezultatul rămîne valabil pentru un număr oarecare de culori.

7.3. Necesitatea condiției este imediată, deoarece dacă graful G fără vîrfuri izolate are un circuit eulerian el este conex. Într-adevăr, oricare două vîrfuri x și y fiind incidente cu cîte un arc care aparține circuitului eulerian, ele sînt legate printr-un lanț.

Pe de altă parte, circuitul eulerian utilizează toate arcele de intrare și toate arcele de ieșire din fiecare vîrf x. La fiecare traversare a vîrfului x, circuitul eulerian utilizează un singur arc de intrare și un singur arc de ieșire, deci există relația $d^-(x) = d^+(x)$. Pentru a demonstra suficiența, fie C un circuit al grafului G care conține un număr maxim de arce. În plus, graful G este conex și $d^-(x) = d^+(x)$ pentru orice vîrf x.

Dacă C nu conține toate arcele lui G, va exista un arc (x, y) care are un vîrf în comun cu circuitul C, deoarece graful G este conex. Să presupunem de exemplu că $x \in C$. Putem face această presupunere, deoarece circuitul C folosește în fiecare vîrf același număr de arce de intrare și arce de ieșire, iar gradul de intrare al vîrfului y este egal cu gradul de ieșire al vîrfului y. Deci dacă $y \in C$, va exista un arc de forma (y, t).

Să notăm cu G_C subgraful parțial al lui G indus de arcele care nu aparțin circuitului C. Deoarece $d^-(x) = d^+(x)$ pentru orice vîrf x și circuitul C folosește în fiecare vîrf același număr de arce de intrare și de ieșire, rezultă că pentru toate vîrfurile din G_C gradul de intrare va fi egal cu gradul de ieșire.

Să plecăm pe arcul (x, y) din G_C și să ne deplasăm de-a lungul arcelor din G_C utilizînd un arc o singură dată, cît timp acest proces poate continua. Nu ne putem opri în nici un vîrf $z \neq x$, deoarece vîrfurile din G_C au gradul de intrare egal cu gradul de ieșire și la fiecare trecere printr-un vîrf $z \neq x$ folosim un arc de intrare și un arc de ieșire. Deci dacă am ajuns în orice vîrf $z \neq x$ putem să și părăsim acest vîrf pe un arc de ieșire.

Numărul de vîrfuri din G_C fiind finit, ne vom întoarce în vîrful x, ceea ce produce un circuit C_1 în G_C.

Reuniunea arcelor circuitelor C și C_1 ne va da un circuit care este mai lung decît C, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci C este un circuit eulerian.

7.4. Să presupunem că graful G are cel puțin un circuit eulerian C, deoarece în caz contrar proprietatea este evident adevărată.

Circuitul eulerian trecînd prin orice arc al lui G, trece și prin vîrful x cu $d^+(x) \geqslant 3$.

Să ne deplasăm pe circuitul C plecînd din x și întorcîndu-ne în final în vîrful x. La fiecare trecere prin x, obținem cîte un circuit. Fie aceste circuite $C_1, C_2, \ldots, C_m$, unde $m = d^+(x)$. Orice permutare a circuitelor $C_1, \ldots, C_m$ determină o ordine de parcurgere a tuturor arcelor grafului G o singură dată, deci

un circuit eulerian. Două circuite euleriene obținute în acest mod sînt identice, conform definiției date, dacă și numai dacă permutările ciclurilor $C_1, \ldots, C_m$ sînt identice ca permutări circulare. Numărul permutărilor circulare a m elemente este egal cu $\frac{m!}{m} = (m-1)!$, deoarece fiecare ciclu cu m elemente poate fi scris în m moduri diferite, luînd ca prim element oricare din cele m elemente. Deci putem obține exact $(m-1)!$ circuite euleriene plecînd de la circuitele $C_1, \ldots, C_m$ în care se descompune circuitul C.

Dacă două familii de circuite $\{C_1, \ldots, C_m\}$ și $\{C'_1, \ldots, C'_m\}$ sînt diferite ca mulțimi, atunci și cele $(m-1)!$ circuite euleriene obținute în acest mod din prima familie vor fi diferite de toate cele $(m-1)!$ circuite euleriene obținute din a II-a familie.

Rezultă că numărul total de circuite euleriene ale grafului G este divizibil cu $(m-1)!$, care este număr par deoarece $m \geqslant 3$.

7.5. Să arătăm mai întîi că orice graf G cu gradele vîrfurilor pare și fără vîrfuri izolate se poate scrie ca o reuniune de cicluri fără muchii comune, dacă definim reuniunea a două grafuri:

$$G_1 = (X_1, U_1) \text{ și } G_2 = (X_2, U_2) \text{ prin:}$$

$$G_1 \cup G_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2).$$

La rezolvarea problemei 6.3 am văzut că $d(x) \geqslant 2$ pentru orice vîrf x implică existența unui ciclu elementar C_1 în G. Suprimînd muchiile ciclului C_1 obținem un graf parțial al lui G care conține eventual anumite vîrfuri izolate. Suprimînd și aceste vîrfuri izolate găsim un subgraf parțial G_1 al lui G care are toate gradele vîrfurilor pare și care nu conține vîrfuri izolate. Într-adevăr, prin suprimarea muchiilor ciclului C_1 anumite vîrfuri ale lui G și-au redus gradul cu 2.

Putem deci scrie:

$$G = C_1 \cup G_1,$$

unde G_1 are cu cel puțin trei muchii mai puțin decît G, iar toate gradele sale sînt pare și nu conține vîrfuri izolate.

Continuînd acest procedeu, ajungem să epuizăm muchiile lui G_1, obținînd în final un singur ciclu C_k, adică $G = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ și din modul de obținere rezultă că $C_1, \ldots, C_k$ nu au două cîte două muchii comune.

Fie acum G un graf cu toate vîrfurile de grad par. Excluzînd vîrfurile izolate, am văzut că G se poate scrie ca reuniunea ciclurilor elementare $C_1, \ldots, C_k$ care nu conțin două cîte două muchii comune. Alegîndu-ne cîte un sens de parcurgere a fiecărui ciclu C_p, vom orienta muchiile ciclului în sensul parcurgerii lor. Prin aceasta gradul de intrare și de ieșire al fiecărui vîrf situat pe ciclul C_p cresc cu cîte o unitate. În final, după ce am orientat toate muchiile ciclurilor C_p pentru $p = 1, \ldots, k$ obținem un graf orientat care verifică condiția impusă.

7.6. Dacă graful G are un ciclu eulerian rezultă că G este conex și are gradele pare, deoarece la fiecare trecere printr-un vîrf se utilizează două muchii. Reciproc, dacă G este conex și are gradele pare, conform problemei precedente muchiile sale pot fi orientate astfel încît să se obțină un graf orientat, care verifică $d^+(x) = d^-(x)$ pentru orice vîrf x. Rezultă, conform problemei 7.3, că graful orientat obținut are un circuit eulerian, care corespunde unui ciclu eulerian în graful G.

Dacă G este conex și are $2k$ vîrfuri de grad impar ($k \geqslant 1$), să notăm cu G_1 graful obținut din G prin adăugarea unui nou vîrf, pe care îl unim prin muchii cu toate cele $2k$ vîrfuri de grad impar ale lui G. Rezultă că G_1 este conex și are gradele pare, deci are un ciclu eulerian. Suprimînd vîrful adăugat și cele $2k$ muchii incidente cu acesta, ciclul eulerian se descompune în k lanțuri disjuncte relativ la muchii, care nu folosesc de două ori aceeași muchie și care acoperă toate muchiile lui G.

Să observăm că deoarece suma gradelor vîrfurilor unui graf este un număr par, rezultă că numărul vîrfurilor de grad impar este par.

7.7. Să notăm cu K_n^* graful orientat complet cu mulțimea vîrfurilor X, de cardinal n și mulțimea arcelor de forma $\{(x, y) \mid x, y \in X \text{ și } x \neq y\}$. Rezultă că graful K_n^* are $n(n-1)$ arce, mulțimea arcelor grafului $\bar{G}$ fiind complementara mulțimii arcelor grafului G în raport cu mulțimea arcelor lui K_n^*. Numărul drumurilor hamiltoniene ale lui K_n^* este egal cu $n!$ deoarece există o bijecție de la mulțimea drumurilor hamiltoniene ale lui K_n^* pe mulțimea permutărilor mulțimii X. Să notăm cu $u_1, \ldots, u_m$ arcele grafului $\bar{G}$ și cu A_i mulțimea drumurilor hamiltoniene ale lui K_n^*, care conțin arcul u_i.

Putem scrie:

$$h(G) = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_m| =$$

$$= n! + \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant m} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}|, \qquad (1)$$

aplicînd principiul includerii și al excluderii (problema 2.2). Termenul $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ reprezintă numărul drumurilor hamiltoniene ale lui K_n^* care conțin arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$. Acest termen este nenul numai în cazul cînd arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ formează drumuri elementare disjuncte două cîte două relativ la vîrfuri. În acest ultim caz să presupunem că există r drumuri elementare care conțin respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_r$ vîrfuri. Numărul componentelor conexe ale subgrafului parțial al lui K_n^* generat de arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ va fi egal cu:

$$r + n - (p_1 + \ldots + p_r) = n - p,$$

deoarece numărul arcelor $p = (p_1 - 1) + \ldots + (p_r - 1) = p_1 + \ldots + p_r - r$.

Orice drum hamiltonian care trece prin arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ definește o permutare a acestor $n - p$ componente și reciproc, corespondența astfel definită fiind bijectivă. Deci dacă arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ formează drumuri elementare fără vîrfuri comune, obținem:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}| = (n-p)!.$$

În concluzie, numerele $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ sînt egale cu 1 dacă și numai dacă $p = n - 1$ și arcele $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ formează un drum hamiltonian în graful $\bar{G}$ și sînt pare în caz contrar.

Ținînd seama de (1) deducem imediat că $h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2$.

Dacă G este un graf neorientat, vom considera graful complet K_n care are $\binom{n}{2}$ muchii și $\frac{n!}{2}$ lanțuri hamiltoniene. Vom nota cu $u_1, \ldots, u_m$ muchiile grafului $\bar{G}$ și cu A_i mulțimea lanțurilor hamiltoniene ale lui K_n care conțin muchia u_i.

Obținem o formulă analoagă cu (1) pentru $h(G)$, cu deosebirea că $n!$ se va înlocui prin $\frac{n!}{2}$, care este par pentru orice $n \geqslant 4$.

Mai obținem:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}| = \frac{(n-p)!}{2} 2^q,$$

dacă muchiile $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ formează q lanțuri elementare fără vîrfuri comune și este 0 în caz contrar. Într-adevăr, cu cele $n - p$ componente conexe pe care le considerăm reduse la cîte un vîrf putem forma

$$\frac{(n-p)!}{2},$$

lanțuri hamiltoniene, iar fiecare lanț L, din cele q lanțuri elementare de forma:

$$L = [x_1, \ldots, x_p]$$

poate fi inserat în fiecare din aceste $\frac{(n-p)!}{2}$ lanțuri hamiltoniene în două moduri: sub forma $[x_1, \ldots, x_p]$ sau $[x_p, \ldots, x_1]$, rezultînd lanțuri hamiltoniene distincte care aparțin mulțimii $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}$.

Deci $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ sînt egale cu 1 cînd $p = n - 1$ și $q = 1$, adică $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ formează un lanț hamiltonian în graful $\bar{G}$ și sînt pare în caz contrar. Deoarece $n \geqslant 4$ deducem că $h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2$.

7.8. Vom demonstra că dacă inversăm sensul unui singur arc $u = (a, b)$ al grafului-turneu G se obține un graf-turneu G_1 cu proprietatea $h(G_1) \equiv h(G) \pmod 2$. Să notăm prin G_2 graful obținut din G prin suprimarea arcului u și cu G_3 graful obținut din G prin adăugarea arcului (b, a) avînd aceleași extremități, dar sens contrar cu u.

Deoarece $\bar{G}_2$ se obține din G_3 prin inversarea sensului tuturor arcelor, se deduce că

$$h(\bar{G}_2) = h(G_3)$$

și ținînd seama de problema precedentă, obținem:

$$h(\bar{G}_2) \equiv h(G_2) \pmod 2.$$

Să notăm respectiv prin $h_3(a, b)$, $h_3(b, a)$ și $h_3(0)$ numărul drumurilor hamiltoniene ale lui G_3 care folosesc fie arcul (a, b), fie arcul (b, a), fie nici unul din arcele (a, b) sau (b, a). Putem scrie:

$$h_3(0) = h(G_2) \equiv h(G_3) = h_3(0) + h_3(a, b) + h_3(b, a),$$

de unde se deduce $h_3(a, b) \equiv h_3(b, a)$ modulo 2, deci:

$$h(G) = h_3(0) + h_3(a, b) \equiv h_3(0) + h_3(b, a) = h(G_1).$$

Fie acum G un graf-turneu oarecare.

Conform problemei 9.5, G conține un drum hamiltonian, fie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Schimbînd sensul unor arce, putem face ca graful-turneu obținut să conțină numai arce de forma (x_i, x_j) cu $i < j$, adică să devină un graf-turneu tranzitiv, care are un singur drum hamiltonian.

Am demonstrat că prin schimbarea sensului unui arc paritatea numărului de drumuri hamiltoniene rămîne neschimbată, de unde se deduce că $h(G) \equiv 1 \pmod 2$.

(L. Rédei, Acta Litt. Szeged, 7(1934), 39—43).

7.9. Fie L un cel mai lung lanț elementar care începe într-un vîrf x_0 al unui graf G:

$$L = [x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

Rezultă că vîrful x_k este adiacent cu x_{k-1} și cu alte $d(x_k) - 1$ vîrfuri care aparțin lanțului L, deoarece în caz contrar lanțul L ar putea fi prelungit la un lanț mai lung.

Dacă x_k este adiacent cu un vîrf x_j astfel încît $1 \leqslant j \leqslant k-2$, **lanțul:**

$$L_1 = [x_0, x_1, \ldots, x_j, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{j+1}]$$

este de asemenea un cel mai lung lanț elementar care pleacă din x_0. Vom numi lanțul L_1 o transformare a lui L. Dacă L_1 este o transformare a lui L atunci și L este o transformare a lui L_1.

Dacă L are ca ultim vîrf pe x_k, atunci L are exact $d(x_k) - 1$ transformări.

Dacă Y este mulțimea vîrfurilor de grad par ale unui graf G și x_0 este un vîrf arbitrar ales al lui G, vom arăta că există un număr par de cele mai lungi lanțuri elementare L care încep în x_0 și au ca vîrf final un vîrf din Y.

Pentru a arăta acest lucru, fie H graful definit în felul următor: mulțimea vîrfurilor lui H este mulțimea celor mai lungi lanțuri elementare care pleacă din x_0 în graful G. Două vîrfuri ale lui H care corespund la două lanțuri L_1 și L_2 sînt adiacente dacă și numai dacă L_2 este o transformare a lui L_1.

Gradul unui vîrf din H corespunzînd lanțului $L = [x_0, \ldots, x_k]$ este $d(x_k) - 1$. Rezultă că mulțimea celor mai lungi lanțuri elementare care pleacă din x_0 și ajung într-un vîrf din Y corespunde mulțimii vîrfurilor de grad impar ale grafului H. Numărul vîrfurilor de grad impar este par pentru orice graf, deci proprietatea enunțată mai înainte este demonstrată.

Pentru a arăta că există un număr par de cicluri hamiltoniene care utilizează o muchie dată $[x_0, y]$ a unui graf G cu toate gradele impare, vom considera graful G_1 obținut din G prin suprimarea muchiei $[x_0, y]$. Pentru G_1 numai vîrfurile x_0 și y au grade pare, deci aplicînd proprietatea anterioară găsim că există un număr par de cele mai lungi lanțuri elementare care au extremitățile în x_0 și y. Deci sau G nu are nici un ciclu hamiltonian care conține muchia $[x_0, y]$, deci un număr par, sau conține un număr par pozitiv de astfel de cicluri. Într-adevăr, dacă G conține un ciclu hamiltonian care trece prin muchia $[x_0, y]$, rezultă că toate lanțurile elementare maximale de extremități x_0 și y sînt lanțuri hamiltoniene.

Conform proprietății demonstrate, numărul acestora este par, iar fiecare dintre ele generează cu muchia $[x_0, y]$ un ciclu hamiltonian care verifică condiția impusă.

(A. G. Thomason, Annals of Discrete Math., 3(1978), 259—268).

7.10. Să observăm mai întîi că dacă G_1 este un graf parțial al lui G de forma $G_1 = (X, V)$ care are gradele tuturor vîrfurilor pare și C este un ciclu elementar al lui G cu mulțimea muchiilor W, graful parțial $G_2 = (X, V \Delta W)$ are de asemenea gradele tuturor vîrfurilor pare. ($A \Delta B$ este diferența simetrică a mulțimilor A și B).

Într-adevăr, dacă ciclul C nu trece prin vîrful x, gradul vîrfului x în G_2 este par.

Dacă de exemplu $(u, x) \in W$; $(x, v) \in W$ și:

a) $(u, x) \notin V$; $(x, v) \notin V$, obținem $d_{G_2}(x) = d_{G_1}(x) + 2$;

b) $(u, x) \in V$; $(x, v) \notin V$ sau $(u, x) \notin V$; $(x, v) \in V$ găsim $d_{G_2}(x) = d_{G_1}(x)$;

c) $(u, x) \in V$; $(x, v) \in V$ deducem că $d_{G_1}(x) = d_G(x) - 2$, pentru orice $x \in V$.

Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul muchiilor m. Deoarece G este conex rezultă $m \geqslant n - 1$. Dacă $m = n - 1$, G este un arbore. Numărul grafurilor parțiale cu grade pare ale lui G este în acest caz $2^{n-1-n+1} = 1$, deoarece singurul graf parțial cu această proprietate este $(X, \emptyset)$.

Într-adevăr, presupunînd că există un graf parțial G_1 al lui G de forma (X, V) cu $V \neq \emptyset$ cu toate gradele pare, am văzut la soluția problemei 7.5 că suprimînd vîrfurile izolate ale lui G_1, graful rezultat se scrie ca o reuniune de cicluri fără vîrfuri comune. Aceasta implică faptul că și G conține cicluri, ceea ce este contradictoriu deoarece G este arbore.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile conexe cu n vîrfuri și cel mult p muchii ($p \geqslant n - 1$) și fie G un graf conex cu n vîrfuri și $p + 1$ muchii. Dacă prin suprimarea oricărei muchii graful G devine neconex, rezultă că G este arbore sau $p + 1 = n - 1$, ceea ce contrazice inegalitatea $p \geqslant n - 1$. Rezultă că G conține o muchie u a cărei suprimare produce un graf cu p muchii, notat G_u care este conex. Grafurile parțiale cu grade pare ale lui G care nu conțin muchia u coincid cu grafurile parțiale cu grade pare ale lui G_u și conform ipotezei de inducție numărul lor este egal cu 2^{p-n+1}.

Vom demonstra că G conține un același număr de grafuri parțiale cu grade pare, care conțin muchia u.

Deoarece G_u este conex, rezultă că există un lanț elementar care unește extremitățile muchiei u. Acest lanț împreună cu muchia u produce un ciclu elementar în G care conține muchia u și pe care îl notăm C. Dacă $G_1 = (X, U_1)$ este un graf parțial al lui G cu gradele pare, am văzut că $G_2 = (X, U_1 \Delta W)$ are gradele pare, unde W este mulțimea muchiilor ciclului C. În plus, dacă G_1 conține muchia u, deoarece $u \in W$ rezultă că G_2 nu conține muchia u, deci este un graf parțial cu grade pare al lui G_u. Corespondența f care asociază lui G_1 pe G_2 este injectivă și deoarece:

$$(A \Delta B) \Delta B = A$$

pentru oricare două mulțimi A și B, obținem că f este și involutivă sau $f(f(G_1)) = G_1$.

Rezultă că pentru orice graf parțial cu grade pare G_2 al lui G_u există un graf parțial cu grade pare al lui G care conține muchia u și anume $G_1 = f(G_2)$, astfel încît $G_2 = f(G_1)$. Rezultă că f este și surjecție, deci bijecție. Obținem că numărul de grafuri parțiale cu grade pare ale lui G este egal cu $2^{p-n+1} + 2^{p-n+1} = 2^{(p+1)-n+1}$ și proprietatea este demonstrată prin inducție.

7.11. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul n al vîrfurilor grafului G. Pentru $n = 1$ vom lua $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \emptyset$ și pentru $n = 2$ definim $X_1 = \{x_1\}$ și $X_2 = \{x_2\}$. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult n vîrfuri și fie G un graf cu $n + 1$ vîrfuri.

Dacă toate vîrfurile lui G au grade pare, vom lua $X_1 = X$ și $X_2 = \emptyset$. În caz contrar, fie a un vîrf de grad impar în G și să notăm cu A mulțimea vîrfurilor adiacente cu a în G. Vom defini graful G_1 cu mulțimea de vîrfuri $Y = X \setminus \{a\}$ și $[x, y]$ este o muchie a lui G_1 dacă și numai dacă: $x, y \in A$ și $[x, y]$ nu este muchie a grafului G sau măcar unul din vîrfurile x și y nu aparține mulțimii A și $[x, y]$ este muchie a grafului G. Conform ipotezei

de inducție, există o partiție $Y = Y_1 \cup Y_2$ astfel încît Y_1 și Y_2 induc subgrafuri ale lui G_1 cu gradele pare. Dar

$$|A \cap Y_1| + |A \cap Y_2| = |A| \equiv 1 \pmod 2,$$

astfel încît putem presupune de exemplu că $|A \cap Y_1|$ este par și $|A \cap Y_2|$ este impar.

Să notăm:

$$Z_1 = Y_1 \cup \{a\},\ Z_2 = Y_2$$

și să arătăm că Z_1 și Z_2 induc subgrafuri cu grade pare ale lui G.

Fie un vîrf $x \in Z_1$. Dacă $x \notin A$ și $x \neq a$, atunci gradul său în subgraful lui G indus de Z_1, pe care îl vom nota $d_{Z_1}(x)$ este par, din modul de definiție a muchiilor grafului G_1. Dacă $x = a$ gradul său $d_{Z_1}(a) = |A \cap Y_1|$, care am presupus că este număr par. Dacă $x \in A$, să notăm cu $d_1(x)$ gradul lui x în subgraful lui G_1 indus de Y_1, cu $d_2(x)$ gradul lui x în subgraful lui G_1 indus de $Y_1 \cap A$ și cu $d_3(x)$ gradul lui x în subgraful lui G indus de $Y_1 \cap A$. Din modul de definiție a grafului G_1 rezultă că $x \in A$ este adiacent cu $y \in Y_1 \cap A$ în graful G dacă și numai dacă el nu este adiacent cu y în graful G_1, deci rezultă:

$$d_3(x) = |Y_1 \cap A| - 1 - d_2(x). \tag{1}$$

Pe de altă parte, ținînd iarăși seama de definiția grafului G_1, deducem:

$$d_{Z_1}(x) = d_1(x) - d_2(x) + d_3(x) + 1, \tag{2}$$

ultimul termen 1 provenind din faptul că $x \in A$ este adiacent și cu $a \in Z_1$ în graful G.

Ținînd seama de (1) obținem:

$$d_{Z_1}(x) = d_1(x) - d_2(x) + (|Y_1 \cap A| - 1 - d_2(x)) + 1 = \\ = d_1(x) - 2d_2(x) + |Y_1 \cap A|,$$

sumă în care fiecare termen este par.

Dacă $x \in Z_2$ obținem în mod analog că dacă $x \notin A$, atunci $d_{Z_1}(x)$ este par și dacă $x \in A$ deducem:

$$d_{Z_2}(x) = d_4(x) - d_5(x) + d_6(x),$$

unde $d_4(x)$ este gradul lui x în subgraful lui G_1 indus de $Y_2 = Z_2$, $d_5(x)$ este gradul lui x în subgraful lui G_1 indus de $Y_2 \cap A$ și $d_6(x)$ este gradul lui x în subgraful lui G indus de $Y_2 \cap A$. Obținem de asemenea:

$$d_6(x) = |Y_2 \cap A| - 1 - d_5(x),$$

ceea ce ne conduce la:

$$d_{Z_2}(x) = d_4(x) - 2d_5(x) + (|Y_2 \cap A| - 1).$$

Acest număr este iarăși par, deoarece $d_4(x)$ este par conform ipotezei de inducție și $|Y_2 \cap A|$ este impar. Proprietatea este deci adevărată pentru orice n.

Pentru a arăta că există o partiție

$$X = X_1 \cup X_2$$

astfel încît gradele vîrfurilor din subgraful generat de X_1 să fie pare și gradele vîrfurilor din subgraful indus de X_2 să fie impare, vom adăuga la graful G

un nou vîrf y, care este adiacent cu toate vîrfurile din X. Fie G_1 graful astfel obținut. Conform rezultatului anterior, există o partiție $Y_1 \cup Y_2$ a mulțimii de vîrfuri $X \cup \{y\}$, unde Y_1 și Y_2 induc subgrafuri cu grade pare în G_1. Dacă de exemplu $y \in Y_2$, atunci notăm $X_1 = Y_1$ și $X_2 = Y_2 \setminus \{y\}$ și obținem partiția căutată a mulțimii de vîrfuri a grafului G.
(W.K. Chen, SIAM J. Appl. Math., 20(1971), 526—529).

8. CONEXITATE

8.1. Să presupunem prin reducere la absurd că G nu este conex și fie C_1 o componentă care nu conține vîrful x_n. Dacă $|C_1| = k$, fie $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ vîrfurile pe care le conține, astfel încît

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k < n.$$

Componenta care îl conține pe x_n conține toate vîrfurile adiacente cu x_n, deci ea conține cel puțin $d_n + 1$ vîrfuri.

Rezultă:

$$k = |C_1| \leqslant n - (d_n + 1).$$

Deoarece $k \leqslant i_k$ obținem $d_k \leqslant d_{i_k} \leqslant k - 1$, căci vîrfurile adiacente cu x_{i_k} se găsesc toate în componenta C_1. Am ajuns la o contradicție, deoarece conform ipotezei $k \leqslant n - d_n - 1$ implică $d_k \geqslant k$ și proprietatea este demonstrată.

8.2. Să arătăm mai întîi că G conține un graf parțial A care este arbore. Dacă G nu conține cicluri, G este un arbore și vom lua $A = G$. În caz contrar G conține cel puțin un ciclu C_1.

Vom suprima o muchie oarecare u_1 a ciclului C_1.

Obținem un graf parțial G_1 al lui G. Dacă G_1 nu conține cicluri vom lua $A = G_1$, deoarece în acest caz G_1 este conex și nu conține cicluri, deci este arbore. În caz contrar suprimăm o muchie u_2 a unui ciclu C_2 al lui G_1 ș.a.m.d. Acest proces nu poate continua indefinit, deoarece G conține cel mult $\binom{n}{2}$ muchii. În final obținem un graf conex și fără cicluri G_r și vom defini $A = G_r$.

Am văzut că orice arbore A are cel puțin un vîrf x_1 de gradul 1 (la rezolvarea problemei 6.3). Dacă există relația $k = n$, vom alege $H = G$. În caz contrar, vom suprima vîrful x_1 și muchia incidentă cu x_1 în arborele A, obținînd un nou arbore A_1, deoarece rezultă imediat că A_1 este conex și fără cicluri. Repetînd acest procedeu ajungem să eliminăm vîrfurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}$, obținînd un arbore A_{n-k} cu k vîrfuri. Subgraful H îl alegem ca fiind subgraful indus de cele k vîrfuri ale arborelui A_{n-k}. H este conex, deoarece conține arborele parțial A_{n-k} cu aceeași mulțime de vîrfuri, care este conex.

8.3. Să notăm numerele de muchii și de vîrfuri din cele p componente cu $m_1, \ldots, m_p$, respectiv $n_1, \ldots, n_p$. Deoarece fiecare componentă este un graf conex, rezultă că

$$m_i \geqslant n_i - 1 \qquad (1)$$

pentru $i = 1, \ldots, p$, egalitatea avînd loc numai pentru acele componente care sînt arbori. Însumînd inegalitățile (1) pentru $i = 1, \ldots, p$ obținem $m \geqslant n - p$, deoarece oricare două componente conexe nu au vîrfuri comune, deci nici muchii comune.

8.4. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două lanțuri elementare de lungime maximă L_1 și L_2 care nu au vîrfuri comune. G fiind conex, există două vîrfuri $x_1 \in L_1$ și $x_2 \in L_2$ care sînt unite printr-un lanț Q care are în comun cu L_1 și L_2 numai extremitățile x_1 și x_2. Vîrful x_i divide lanțul L_i în două sublanțuri L_{i1} și L_{i2} (dintre care unul este eventual vid) pentru $i = 1, 2$.

Notînd cu $l(L)$ lungimea lanțului L, adică numărul muchiilor lui L, putem presupune că $l(L_{i1}) \geqslant l(L_{i2})$ și $l(L_{11}) \geqslant l(L_{21})$.

Obținem:

$$l(L_{11}, Q, L_{21}) > l(L_{11}) + l(L_{21}) \geqslant 2l(L_{21}) \geqslant l(L_{21}) + l(L_{22}) = l(L_2),$$

deci lanțul (L_{11}, Q, L_{21}) este mai lung decît L_2, ceea ce contrazice ipoteza.

Să presupunem că G este arbore și fie L_1, L_2 două lanțuri de lungime maximă ale lui G. L_1 și L_2 au cel puțin un vîrf comun, iar vîrfurile comune lui L_1 și L_2 formează un lanț Q (care poate fi redus la un singur vîrf). Deci vîrfurile din $L_1 \cup L_2$ generează un subgraf de următoarea formă: există două lanțuri L_1', L_2' care pleacă dintr-un vîrf terminal al lui Q și două lanțuri L_1'', L_2'' care pleacă din celălalt vîrf terminal al lui Q, astfel încît:

$$L_1 = (L_1', Q, L_1'') \text{ și } L_2 = (L_2', Q, L_2'').$$

Avem $l(L_1') = l(L_2')$ deoarece dacă de exemplu $l(L_1') > l(L_2')$ lanțul (L_1', Q, L_2'') ar fi mai lung ca L_2, ceea ce contrazice ipoteza.

La fel obținem $l(L_1'') = l(L_2'')$.

Deoarece (L_1', L_2') este un lanț, lungimea sa este cel mult egală cu lungimea unui lanț maxim, deci $2l(L_1') \leqslant l(L_1)$ sau $l(L_1') \leqslant \frac{1}{2} l(L_1)$ și analog $l(L_1'') \leqslant \frac{1}{2} l(L_1)$. Deci punctul mdian sau cele două puncte mediane adiacente ale lanțului L_1 aparțin lanțului Q și deci lui L_2. Deoarece L_2 poate fi ales arbitrar, rezultă că punctul sau cele două puncte mediane ale lui L_1 (după cum $l(L_1)$ este pară sau impară), aparțin intersecției tuturor lanțurilor maxime ale arborelui G.

Dacă graful conex G conține cicluri, se poate ca această proprietate să nu mai fie adevărată.

8.5. Pentru a demonstra necesitatea, fie G un graf bipartit care admite bipartiția $X = A \cup B$.

Orice ciclu elementar din G are forma:

$$[a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k, a_1]$$

unde $a_i \in A$ și $b_i \in B$ pentru $1 \leqslant i \leqslant k$.

Lungimea acestui ciclu este $2k$, deci un număr par.

Să presupunem acum că orice ciclu elementar al lui G are un număr par de vîrfuri.

Vom colora cu două culori vîrfurile lui G astfel încît oricare două vîrfuri unite printr-o muchie să aibă culori diferite în modul următor:

Plecăm de la un vîrf x_1 pe care îl colorăm cu culoarea a, vîrfurile adiacente cu x_1 le colorăm cu culoarea b, vîrfurile adiacente cu vîrfurile cu culoarea b

le colorăm din nou cu a ș.a.m.d. În acest mod nici un nod din componenta conexă care îl conține pe x_1 nu va fi colorat odată cu a și odată cu b, ceea ce este contradictoriu.

Într-adevăr, să presupunem că vîrful z este colorat de-a lungul unui lanț $L_1 = [x_1, y_1, \ldots, y_k, z]$ de lungime pară cu culoarea a și de-a lungul unui lanț $L_2 = [x_1, t_1, \ldots, t_s, z]$ de lungime impară cu culoarea b. Dacă L_1 și L_2 nu au în comun decît extremitățile, reuniunea muchiilor lui L_1 și L_2 formează un ciclu elementar cu un număr impar de muchii, ceea ce contrazice ipoteza. În caz contrar L_1 și L_2 au anumite vîrfuri comune, ceea ce determină ca reuniunea muchiilor lui L_1 și L_2 să genereze un subgraf parțial al lui G format din lanțuri și cicluri. Vom demonstra prin inducție după numărul de muchii ale lui L_1 că din condiția ca G să nu conțină cicluri elementare impare se deduce că lungimile lui L_1 și L_2 trebuie să aibă aceeași paritate.

Dacă $l(L_1) = 1$ și $l(L_2)$ este un număr par, rezultă că ciclul elementar format din muchia lui L_1 și muchiile lui L_2 este impar, ceea ce contrazice ipoteza. Obținem deci că $l(L_2)$ este număr impar. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru oricare două lanțuri L_1 și L_2 de forma indicată astfel încît $l(L_1) \leqslant t$ și fie L_1 și L_2 două lanțuri cu aceleași extremități astfel încît $l(L_1) = t + 1$.

Am presupus că L_1 și L_2 mai au un vîrf y în comun, diferit de x_1 și z. Să notăm cu L_1' și L_2' sublanțurile lui L_1, respectiv L_2 cuprinse între x_1 și y și cu L_1'', L_2'' sublanțurile lui L_1, respectiv L_2 cuprinse între y și z. Deoarece $l(L_1') \leqslant t$ rezultă, conform ipotezei de inducție, că $l(L_1')$ și $l(L_2')$ au aceeași paritate. Luînd în rolul lui x_1 pe y, deoarece $l(L_1'') \leqslant t$ rezultă de asemenea că $l(L_1'')$ și $l(L_2'')$ au aceeași paritate. Deoarece $l(L_1) = l(L_1') + l(L_1'')$ și $l(L_2) = l(L_2') + l(L_2'')$, rezultă că și $l(L_1)$ și $l(L_2)$ au aceeași paritate. Deci vîrfurile din componenta conexă care îl conține pe x_1 pot fi colorate în acest mod cu două culori. Continuînd procedeul pentru toate componentele conexe ale lui G obținem o colorare cu două culori, a și b a vîrfurilor lui G astfel încît oricare două vîrfuri adiacente să aibă culori diferite. Rezultă că G este bipartit, luînd în mulțimea A vîrfurile colorate cu culoarea a și în mulțimea B vîrfurile colorate cu culoarea b.

Mai rezultă că orice graf G fără cicluri impare, care are cel puțin o muchie, este bicromatic sau $\chi(G) = 2$.

8.6. Vîrful de grad 9 trebuie să fie adiacent cu toate celelalte vîrfuri ale grafului, deci și cu vîrfurile de gradul 1.

Rezultă că vîrful de grad 7 poate fi adiacent cu numai $9 - 3 = 6$ vîrfuri, ceea ce este absurd.

Deci nu există un graf cu proprietatea cerută.

8.7. Necesitatea condiției este imediată, deoarece $d_1 + \ldots + d_n$ este dublul numărului de muchii, deci este număr par și $d_n \leqslant d_1 + \ldots + d_{n-1}$ deoarece orice muchie incidentă cu x_n mai este incidentă cu unul din vîrfurile rămase, dacă $d_n = d(x_n)$.

Vom demonstra suficiența condiției prin inducție după $d_1 + \ldots + d_n$. Dacă $d_1 + \ldots + d_n = 2$ rezultă $d_1 = \ldots = d_{n-2} = 0$ și $d_{n-1} = d_n = 1$, deci graful căutat conține o muchie și $n - 2$ vîrfuri izolate.

Să presupunem proprietatea adevărată pentru toate șirurile de numere $d_1, \ldots, d_n$ care verifică a) și b) și în plus $d_1 + \ldots + d_n \leqslant 2d$ $(d \geqslant 2)$.

Fie acum $d_1 + \ldots + d_n = 2d + 2$, iar condițiile a) și b) sînt verificate. Vom studia două cazuri:

I. Există relația $d_{n-2} < d_n$. Rezultă că $d_n - 1$ este cel mai mare număr din șirul: $d_1, d_2, \ldots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ și rămîne să verificăm condițiile:

c) $d_1 + \ldots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \equiv 0 \pmod 2$

d) $d_1 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1} - 1 \geqslant d_n - 1$,

care rezultă imediat din a) și b).

II. Există egalitatea $d_{n-2} = d_n$. Rezultă $d_{n-1} = d_n$. Condiția c) este de asemenea îndeplinită și condiția b) devine:

e) $d_1 + \ldots + d_{n-3} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \geqslant d_{n-2}$

deoarece $d_{n-2} = \max (d_1, \ldots, d_{n-3}, d_{n-1} - 1, d_n - 1)$.

Însă condiția e) este verificată. Într-adevăr, dacă $d_{n-2} = 1$, condiția a) implică faptul că membrul stîng al inegalității e) este impar, deci este cel puțin egal cu 1 deoarece în acest caz $d_{n-1} = d_n = 1$.

Dacă $d_{n-2} \geqslant 2$ obținem $d_{n-1} - 1 + d_n - 1 \geqslant d_{n-2}$ pentru că $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n$.

Rezultă că numerele $d_1, \ldots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ de sumă $2d$ verifică condițiile a) și b) și conform ipotezei de inducție, există un multigraf cu n vîrfuri ale cărui grade formează șirul scris. Unind printr-o nouă muchie vîrfurile de grade $d_{n-1} - 1$ și $d_n - 1$, obținem un graf ale cărui grade sînt tocmai $d_1, \ldots, d_n$.

8.8. Să presupunem că există un graf G regulat de grad k cu n vîrfuri

Obținem $kn = 2m$, unde m este numărul de muchii ale lui G și gradul k nu poate depăși $n - 1$. Am găsit deci două condiții necesare pe care trebuie să le satisfacă numărul n:

a) $nk \equiv 0 \pmod 2$;

b) $n \geqslant k + 1$.

Vom demonstra că dacă a) și b) sînt satisfăcute, există un graf regulat de grad k cu n vîrfuri.

Vom distinge 2 cazuri:

1) k este par. Considerăm vîrfurile unui poligon regulat cu n vîrfuri pe care le unim prin muchii cu vecinii lor, cu vecinii de ordinul doi, ..., cu vecinii de ordinul $\frac{k}{2}$. Deoarece $k < n$ obținem $\frac{k}{2} < \frac{n}{2}$, deci prin această construcție fiecare vîrf are gradul k și nu apar muchii multiple (fig. 8.1).

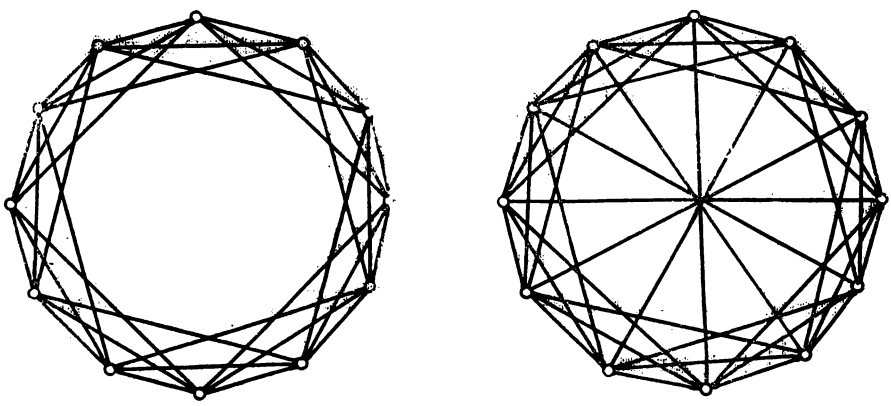


Fig. 8.1.

2) k este impar. Din condiția a) rezultă că n este par. Vom desena graful regulat de grad $k-1$ cu n vîrfuri construit ca în cazul 1. Condiția b) ne asigură că avem:

$$\frac{k-1}{2} \leqslant \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1,$$

deci extremitățile celor mai lungi diagonale ale poligonului nu sînt unite prin muchii. Unind deci vîrfurile diametral opuse ale poligonului prin cîte o muchie, fiecare vîrf va avea gradul egal cu k, deci obținem un graf regulat de gradul k cu n vîrfuri.

8.9. Fie x un vîrf al grafului G care este adiacent cu vîrfurile $x_1, \ldots, x_m$ ale lui G.

Deoarece G nu conține subgrafuri complete cu trei vîrfuri, rezultă că vîrfurile $x_1, \ldots, x_m$ nu sînt adiacente două cîte două.

Mai rezultă că oricare două vîrfuri x_i, x_j cu $1 \leqslant i, j \leqslant m$ și $i \neq j$ sînt adiacente cu un vîrf $z \neq x$. Obținem că z și x nu sînt adiacente, deoarece G nu conține triunghiuri.

Aplicația care asociază fiecărei perechi $\{x_i, x_j\}$ vîrful z neadiacent cu x, este injectivă. Într-adevăr, dacă un același z ar corespunde la două perechi diferite, ar rezulta că z și x au cel puțin trei vîrfuri adiacente și cu z și cu x, ceea ce contrazice ipoteza.

Deoarece numărul perechilor $\{x_i, x_j\}$ este egal cu $\binom{m}{2}$, rezultă că numărul vîrfurilor z neadiacente cu x este mai mare sau egal cu $\binom{m}{2}$.

Însă pentru fiecare vîrf z neadiacent cu x există conform ipotezei două vîrfuri dintre $x_1, \ldots, x_m$ care sînt adiacente și cu z și cu x, fie x_r și x_s. Această aplicație care asociază fiecărui vîrf z neadiacent cu x perechea de vîrfuri $\{x_r, x_s\}$ este de asemenea injectivă.

Dacă la două vîrfuri $z_1 \neq z_2$ ar corespunde o aceeași pereche $\{x_r, x_s\}$, ar rezulta că există cel puțin trei vîrfuri: x, z_1, z_2 adiacente cu x_r și x_s, ceea ce contrazice iarăși ipoteza.

Deci numărul vîrfurilor z neadiacente cu x este cel mult egal cu $\binom{m}{2}$.

Din cele două inegalități de sens contrar rezultă că numărul de vîrfuri neadiacente cu x este egal cu $\binom{m}{2}$, deci putem scrie:

$$n = 1 + m + \binom{m}{2},$$

de unde

$$m = \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}.$$

Rezultă că $8n - 7 = k^2$, deci $n = \frac{k^2+7}{8}$, de unde $k = 2p + 1$ și $n = \binom{p+1}{2} + 1$, iar $m = p$.

Obținem că G este un graf regulat de gradul p. Pentru $p = 2$ obținem $n = 4$, iar $G = K_{2,2}$.

O condiție necesară de existență a acestui graf este ca np să fie număr par, deoarece reprezintă dublul numărului de muchii ale grafului.

8.10. Vom efectua următoarea construcție:

Presupunînd că am construit un graf regulat de gradul r și grosimea g, pe care îl notăm $G(r, g)$ și un graf $G(r', g-1)$, unde r' este egal cu numărul vîrfurilor grafului $G(r, g)$, vom înlocui fiecare vîrf al grafului $G(r', g-1)$ prin r' vîrfuri de gradul 1 (fig. 8.2).

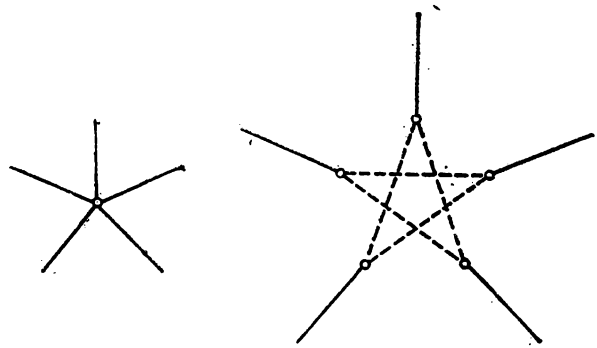


Fig.. 8.2.

În continuare, vom identifica aceste r' vîrfuri cu vîrfurile unei copii a grafului $G(r, g)$. În figura 8.2 graful $G(r, g)$ este C_5, care se obține pentru $r = 2$ și $g = 5$. Să notăm cu G_1 graful obținut în acest mod. Graful G_1 este regulat de gradul $r + 1$ prin construcție. Să demonstrăm că $g(G_1) = g$. Dacă considerăm un ciclu elementar de lungime minimă conținut într-o copie a grafului $G(r, g)$, el are lungimea g, deci $g(G_1) \leqslant g$. Deoarece orice alt ciclu elementar dintr-o copie a lui $G(r, g)$ are lungimea mai mare sau egală cu g, fie C un ciclu elementar de lungime minimă, egală cu s, care nu este conținut în nici o copie a grafului $G(r, g)$. Dacă înlocuim fiecare copie a lui $G(r, g)$ printr-un singur vîrf, păstrînd muchiile incidente vîrfurilor din $G(r, g)$, graful G_1 se transformă în $G(r', g-1)$. Ciclul C se transformă într-un subgraf parțial nevid al lui $G(r', g-1)$ cu toate gradele vîrfurilor pare, deoarece ciclul C are un număr de intrări egal cu numărul de ieșiri din fiecare copie a lui $G(r, g)$, dacă fixăm un sens de parcurgere a ciclului C.

Orice subgraf parțial nevid cu toate gradele vîrfurilor pare al unui graf conține un ciclu elementar. Într-adevăr, în caz contrar o componentă conexă a acestui subgraf are gradele vîrfurilor pare și nu conține cicluri, deci este arbore. Dar acest lucru este contradictoriu, deoarece orice arbore are cel puțin 2 vîrfuri de gradul unu, care nu sînt de grad par.

Să notăm cu C_1 ciclul elementar conținut în imaginea ciclului C prin contracția fiecărei copii a lui $G(r, g)$ la un singur vîrf.

Deoarece C conține cel puțin o muchie dintr-o copie a lui $G(r, g)$ prin construcția grafului G_1, rezultă că C_1 are cel mult $s-1$ muchii. Deci putem scrie:

$$s - 1 \geqslant l(C_1) \geqslant g - 1,$$

deoarece graful $G(r', g-1)$ care conține ciclul C_1 are grosimea $g-1$. Obținem $s \geqslant g$ sau $G_1 = G(r+1, g)$, deoarece orice ciclu al lui G_1 are lungimea cel puțin egală cu g.

$G(r, 2)$ există pentru orice $r \geqslant 2$ considerînd două vîrfuri unite prin r muchii paralele; la fel $G(2, g)$ există pentru orice $g \geqslant 2$, considerînd un ciclu elementar cu g vîrfuri.

Folosind construcția descrisă deducem existența grafurilor $G(3, 3)$, $G(4, 3)$, $G(5, 3)$, ..., $G(r, 3)$ pentru orice $r \geqslant 2$; $G(3, 4)$, $G(4, 4)$, $G(5, 4)$, ..., $G(r, 4)$ pentru orice $r \geqslant 2$ ș.a.m.d., deci prin inducție deducem existența unui graf $G(r, g)$ pentru orice $r \geqslant 2$ și $g \geqslant 2$.

8.11. Fie g impar. Dacă x este un vîrf oarecare al grafului G, să notăm prin S_i mulțimea vîrfurilor care se găsesc la distanța i de x, pentru $i = 0, 1, \ldots, \frac{g-1}{2}$.

Din fiecare vîrf z al mulțimii S_i există exact o muchie care se leagă de un vîrf din S_{i-1}.

Într-adevăr, există cel puțin o muchie din definiția mulțimilor S_i. Existența a două astfel de muchii ar conduce la existența a două lanțuri de la z la x, fiecare de lungime i, iar acestea ar forma un ciclu, deci și un ciclu elementar, de lungime mai mică decît g, ceea ce contrazice ipoteza. Deoarece gradul fiecărui vîrf este r, găsim $|S_{i+1}| = (r-1)|S_i|$ pentru $i = 1, \ldots, \frac{g-3}{2}$. În concluzie:

$$n \geqslant |S_0| + |S_1| + \ldots + |S_{(g-1)/2}| = 1 + r + r(r-1) + \ldots + r(r-1)^{(g-3)/2}.$$

b) Dacă g este par, să considerăm două vîrfuri adiacente x și y. Dacă notăm prin S_i mulțimea vîrfurilor care se găsesc la distanța i de mulțimea $\{x, y\}$ pentru $i = 1, \ldots, \frac{g}{2} - 1$, obținem $|S_1| = 2(r-1)$ și $|S_{i+1}| = (r-1)|S_i|$ pentru $i = 1, \ldots, \frac{g}{2} - 2$.

Rezultă că:

$$n \geqslant |S_0| + |S_1| + \ldots + \left|S_{\frac{g}{2}-1}\right| = 2 + 2(r-1) + \ldots + 2(r-1)^{g/2-1}.$$

8.12. a) Fie x_1 un vîrf al unui graf G regulat de gradul 3 cu grosimea $g(G) = 4$ și fie x_2, x_3, x_4 vîrfurile adiacente cu x_1. Vîrfurile x_2, x_3, x_4 nu sînt adiacente două cîte două, deoarece în acest caz am avea $g(G) = 3$.

Să notăm cu x_5, x_6 vîrfurile care împreună cu x_1 sînt adiacente cu x_2. Deci numărul vîrfurilor lui G este cel puțin 6. Deoarece G trebuie să fie regulat de gradul 3, vîrfurile x_3 și x_4 sînt adiacente și cu x_5 și cu x_6, adică $G = K_{3,3}$.

b) Fie $[x_1, x_2, \ldots, x_5, x_1]$ un cel mai scurt ciclu elementar al grafului G. Notăm cu y_i cel de al treilea vîrf adiacent cu x_i pentru $i = 1, \ldots, 5$.

Vîrfurile y_i sînt distincte două cîte două și sînt diferite de vîrfurile x_j, deoarece în caz contrar am avea $g(G) \leqslant 4$. Deci graful G are cel puțin 10 vîrfuri. Dacă G are 10 vîrfuri, singurele vîrfuri la distanța 4 de y_1 sînt y_3 și y_4, deci y_1 trebuie să fie adiacent cu y_3 și y_4, în afara lui x_1, deoarece în caz contrar $g(G) \leqslant 4$.

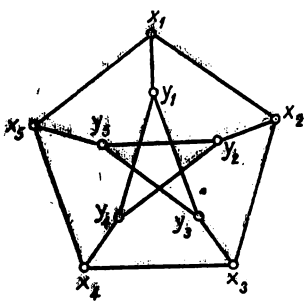


Fig. 8.3.

Analog y_2 este adiacent cu y_4 și y_5, y_3 este adiacent cu y_1 și y_5, y_4 este adiacent cu y_1 și y_2 și y_5 este adiacent cu y_2 și y_3. Se obține astfel *graful lui Petersen* (fig. 8.3).

8.13. Să presupunem prin reducere la absurd că pentru orice vîrf x subgraful G_x nu este conex.

Fie $L = [x_1, \ldots, x_m]$ un lanț elementar de lungime maximă în graful G. Conform ipotezei, G_{x_1} nu este conex. Să notăm cu C_1 o componentă a acestui subgraf care nu conține lanțul $[x_2, \ldots, x_m]$.

Deoarece G este conex, există o muchie care unește un vîrf $y \in C_1$ cu vîrful x_1, deoarece vîrfurile din C_1 nu pot fi unite cu vîrfuri din alte componente conexe ale subgrafului G_{x_1}. Obținem că $y \notin \{x_2, \ldots, x_m\}$, deci lanțul

$$[y, x_1, \ldots, x_m]$$

este un lanț elementar mai lung ca L, ceea ce contrazice ipoteza că L este un lanț elementar de lungime maximă.

Rezultă că există un vîrf x astfel încît subgraful G_x să fie conex.

Dacă G este un circuit elementar, prin suprimarea oricărui vîrf găsim un subgraf care nu mai este tare conex, deși G are această proprietate.

8.14. Să presupunem că G are mulțimea vîrfurilor X și este tare conex. Dacă $A \neq \emptyset$, fie $a \in A$ și $b \in X \setminus A$. Există deci un drum în G de forma $(a, \ldots, b)$.

Deoarece $a \in A$ și $b \notin A$, va exista cel puțin un arc al acestui drum de forma (x, y), unde $x \in A$ și $y \notin A$.

Să arătăm că dacă pentru orice submulțime nevidă A există cel puțin un arc de forma (x, y) cu $x \in A$ și $y \notin A$, atunci G este tare conex.

Fie a, b două vîrfuri diferite ale lui G și să presupunem prin reducere la absurd că nu există nici un drum de forma $(a, \ldots, b)$.

Să notăm cu A mulțimea vîrfurilor lui G care sînt extremități ale unor drumuri care pleacă din a. Rezultă că $b \notin A$ și nu există nici un arc de forma (x, y) cu $x \in A$ și $y \notin A$, deoarece în caz contrar orice drum de forma $(a, \ldots, x)$ prelungit cu arcul (x, y) ar produce un drum de la a la y. Însă în acest caz am avea $y \in A$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci nu există nici un arc de forma (x, y), ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că G este tare conex.

Să notăm cu G_1 graful obținut din G prin schimbarea sensului tuturor arcelor lui G. Conform definiției conexității tari, rezultă că G este tare conex dacă și numai dacă G_1 este tare conex.

Proprietatea demonstrată, aplicată pentru G_1, se traduce în cazul grafului G în modul următor:

G este tare conex dacă și numai dacă pentru orice submulțime nevidă de vîrfuri A există cel puțin un arc de forma (y, x) unde $y \notin A$ și $x \in A$.

8.15. Să presupunem că G conține un circuit, deci G are un circuit elementar. Să presupunem că următorul circuit elementar al lui G are un număr minim de arce:

$$C = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1),$$

unde vîrfurile $x_1, \ldots, x_k$ sînt distincte două cîte două. Dacă $k = 3$, proprietatea este demonstrată.

În caz contrar, G fiind complet și antisimetric, există fie arcul (x_1, x_{k-1}), deci circuitul cu 3 vîrfuri (x_1, x_{k-1}, x_k, x_1), ceea ce contrazice ipoteza $k \geq 4$, fie arcul (x_{k-1}, x_1). În acest caz am obținut iarăși un circuit mai scurt decît C:

$$C_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_1),$$

ceea ce contrazice ipoteza că C conține un număr minim de arce și proprietatea este demonstrată prin reducere la absurd.

8.16. Deoarece între oricare două vîrfuri ale grafului-turneu T cu n vîrfuri există un arc și numai unul, rezultă că $r_i + s_i = n - 1$ pentru $i = 1, \ldots, n$. De asemenea $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$, deoarece fiecare sumă

reprezintă numărul de arce ale lui T, fiecare arc (x, y) contribuind cu exact o unitate la fiecare sumă.

Acum

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (n - 1 - s_i)^2 = n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2.$$

8.17. Fie x un vîrf al lui G cu gradul de ieșire maxim, adică

$$d^+(x) = \max_{t \in X} d^+(t), \tag{1}$$

unde X este mulțimea vîrfurilor grafului G. Vom demonstra că vîrful x satisface condiția pusă în enunț.

Fie $y \in X$ și $y \neq x$. Dacă graful G nu conține arcul (x, y), atunci conține arcul (y, x), deoarece orice graf-turneu este complet. Să presupunem, prin reducere la absurd, că vîrful y nu poate fi atins plecînd din x nici pe drumuri de lungime 2. Deci pentru orice arc (x, z) există arcul (y, z), deoarece în caz contrar ar exista arcul (z, y), deci drumul de lungime 2 de la x la z: (x, z, y), ceea ce contrazice ipoteza.

În concluzie, pentru orice arc care pleacă din x, de forma (x, z), există arcul (y, z) care pleacă din y și în plus există arcul (y, x) care pleacă din y și intră în x.

Rezultă că $d^+(y) > d^+(x)$, ceea ce contrazice (1), deci vîrful x definit de (1) are proprietatea cerută.

8.18. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul de vîrfuri ale grafului G. Dacă G are 2 vîrfuri x și y și acestea sînt izolate, vom lua $S = \{x, y\}$. În caz contrar există un arc, fie (y, x) și vom lua $S = \{y\}$.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult n vîrfuri și fie G un graf cu $n + 1$ vîrfuri. Fe x un vîrf al lui G și să notăm cu A mulțimea $\{z \mid (x, z)$ este un arc al grafului $G\}$. Să notăm cu G_1 subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfurilor din mulțimea $A \cup \{x\}$. Conform ipotezei de inducție, G_1 conține o mulțime de vîrfuri S_1 care nu sînt adiacente două cîte două și are proprietatea că orice vîrf $z \notin S_1$ poate fi atins plecînd dintr-un vîrf $y \in S_1$ pe un drum al lui G_1 de lungime cel mult egală cu 2. Vom studia două cazuri:

a) Vîrfurile din $S_1 \cup \{x\}$ nu sînt adiacente două cîte două. În acest caz vom defini $S = S_1 \cup \{x\}$. Orice vîrf z din G_1 cu proprietatea că $z \notin S_1$ poate fi atins plecînd dintr-un vîrf $y \in S_1$ pe un drum de lungime cel mult egală cu 2. Dacă $z \in A$, atunci există drumul (x, z) de lungime egală cu 1.

b) Există un vîrf $z \in S_1$ care este adiacent cu x. Deoarece $z \notin A$, rezultă că (z, x) este un arc al grafului G. În acest caz definim $S = S_1$. Dacă y este un vîrf al grafului G_1 care nu aparține lui S_1, el poate fi atins pe un drum de lungime cel mult egală cu 2 plecînd de la un vîrf din S_1. Dacă $y \in A$, obținem drumul (z, x, y) de lungime egală cu 2.

Dacă $y = x$ am văzut că există arcul (z, x) unde $z \in S_1 = S$.

Proprietatea este deci demonstrată prin inducție.

(V. Chvátal, L. Lovász, Hypergraph Seminar, Lecture Notes in Math., 411(1974), Springer-Verlag, p. 175).

Deoarece orice graf-turneu este complet, rezultă că $|S| = 1$ și se obține enunțul din problema anterioară.

8.19. Este clar că $C(2) = 1$, deoarece vîrfurile x_1 și x_2 trebuie să fie legate printr-o muchie în cazul unui graf conex.

Pentru $n \geqslant 3$ trebuie să arătăm că:

$$n\, 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}} C(k).$$

Să observăm că $2^{\binom{n}{2}}$ reprezintă numărul tuturor grafurilor neorientate cu mulțimea vîrfurilor $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pentru fiecare graf neorientat putem marca un vîrf oarecare în n moduri, deci $n\, 2^{\binom{n}{2}}$ reprezintă numărul grafurilor neorientate cu mulțimea vîrfurilor X, cu un vîrf marcat.

Să demonstrăm că și membrul drept al formulei numără același lucru.

Pentru aceasta, vom considera un graf G cu mulțimea vîrfurilor X care conține un vîrf marcat, fie x_i, cu $1 \leqslant i \leqslant n$. Vîrful x_i aparține unei componente conexe C a lui G. Vom nota numărul de vîrfuri din C cu k. Rezultă $1 \leqslant k \leqslant n$, iar vîrfurile din C nu sînt legate prin nici o muchie cu vîrfurile din $X \setminus C$. Componenta C poate fi aleasă în $\binom{n}{k}$ moduri, vîrful care este marcat în C poate fi ales în k moduri, numărul grafurilor conexe cu mulțimea de vîrfuri C este egal cu $C(k)$, iar numărul grafurilor cu mulțimea de vîrfuri $X \setminus C$ este egal cu $2^{\binom{n-k}{2}}$.

Cum în acest mod pentru $k = 1, \ldots, n$ se obțin toate cele $n\, 2^{\binom{n}{2}}$ grafuri neorientate cu mulțimea de vîrfuri X care conțin cîte un vîrf marcat, egalitatea este demonstrată.

Aplicînd recurența găsită, se obțin următoarele valori pentru numerele $C(n)$:

$n = 1$	2	3	4	5	6	7
$C(n) = 1$	1	4	38	728	26 704	1 866 256

8.20. Vom considera mulțimea celor $2^{\binom{n}{2}}$ grafuri cu mulțimea vîrfurilor $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și să notăm prin G_{ij} mulțimea acestor grafuri care au proprietățile:

a) x_i și x_j nu sînt adiacente;

b) pentru orice alt vîrf x_k, dacă x_i și x_k sînt adiacente, atunci x_k și x_j nu sînt adiacente.

Deci pentru orice $k \neq i, j$ avem trei posibilități de a uni prin muchii vîrfurile x_i, x_j și x_k.

Rezultă că:

$$|G_{ij}| = 3^{n-2} 2^{\binom{n-2}{2}} \text{ pentru orice } i \neq j.$$

Mulțimea grafurilor cu mulțimea vîrfurilor X și diametrul cel puțin trei este $\bigcup_{i<j} G_{ij}$ și obținem:

$$\left|\bigcup_{i<j} G_{ij}\right| \leqslant \sum_{i<j} |G_{ij}| = \binom{n}{2} 3^{n-2} 2^{\binom{n-2}{2}},$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} 3^{n-2} 2^{\binom{n-2}{2}} \Big/ 2^{\binom{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{9} \binom{n}{2} \frac{3^n}{4^n} = 0.$$

Rezultă că aproape toate grafurile cu n vîrfuri au diametrul egal cu 1 sau cu 2 cînd $n \to \infty$. Există însă un singur graf cu diametrul egal cu 1 și anume **graful complet** K_n, deci aproape toate grafurile cu n vîrfuri au diametrul egal cu 2 cînd $n \to \infty$.

De aici se deduce că aproape toate grafurile cu n vîrfuri sînt conexe pentru $n \to \infty$.

În mod analog se arată că aproape toate grafurile orientate cu n vîrfuri au proprietatea că pentru oricare două vîrfuri x și y există un drum de lungime unu sau doi de la x la y, pentru $n \to \infty$.

8.21. Din modul de definiție rezultă imediat reflexivitatea și simetria acestei relații binare definită pe mulțimea U. Pentru a demonstra tranzitivitatea, să arătăm că dacă muchiile u_1 și u_2 se găsesc pe un același ciclu elementar C_1 și u_2 și u_3 se găsesc pe un același ciclu elementar C_2, atunci există un ciclu elementar C_3 care conține muchiile u_1 și u_3.

Să ne deplasăm pe C_2 în ambele sensuri, plecînd din extremitățile muchiei u_3, pînă cînd ajungem în primele vîrfuri care se găsesc pe ciclul C_1. Fie x și y aceste vîrfuri de pe ciclul C_1 (fig. 8.4). Se poate întîmpla ca x sau y să fie extremități ale lui u_3, însă $x \neq y$, deoarece pe porțiunea din ciclul C_1 delimitată de x și y și care nu conține muchia u_1 se găsește muchia u_2. Ciclul C_3, desenat cu linie groasă în fig. 8.4, se obține prin reuniunea lanțului elementar care unește pe x cu y și care conține muchia u_1 în ciclul C_1, cu lanțul elementar care unește pe x cu y și care conține muchia u_3 în ciclul C_2.

8.22. Vom demonstra că a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a):
Pentru a arăta că a) $\Rightarrow$ c), fie G un graf 2-conex și u și v două muchii care au o extremitate x comună. Fie y și z celelalte extremități ale lor diferite de x. Deoarece G_x este conex, rezultă că există un lanț elementar care unește pe y cu z în G_x. Acest lanț elementar formează împreună cu muchiile u și v un ciclu elementar în graful G. Deci, conform problemei anterioare, oricare două muchii cu o extremitate comună sînt echivalente. Deoarece G este conex, rezultă că această relație de echivalență are o singură clasă și anume mulțimea muchiilor grafului G. Deci oricare două muchii ale lui G se găsesc pe un ciclu elementar.

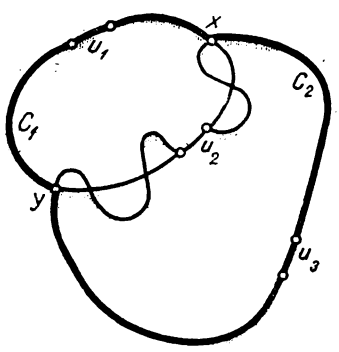


Fig. 8.4.

De asemenea, din faptul că G este conex, rezultă că G nu are vîrfuri izolate.

c) $\Rightarrow$ b): Fie x, y două vîrfuri distincte ale grafului G. Conform ipotezei, G nu are vîrfuri izolate, deci există două muchii distincte u și v care sînt incidente cu x, respectiv cu y.

Într-adevăr, în caz contrar există o muchie $[x, y]$ și vîrfurile x și y nu mai sînt adiacente cu alte vîrfuri ale lui G. Dacă $n = 3$, acest fapt ar implica că G are un vîrf izolat, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă $n \geqslant 4$, în mulțimea vîrfurilor rămase există cel puțin o muchie u, deoarece G nu are vîrfuri izolate. Muchiile $[x, y]$ și u nu se găsesc pe un ciclu elementar, deoarece $d(x) = d(y) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza.
Deci există două muchii distincte u și v incidente cu x, respectiv cu y. Conform ipotezei are loc c), deci există un ciclu elementar C care conține pe u și v, deci pe x și y.
b) $\Rightarrow$ a): Deoarece oricare două vîrfuri ale lui G aparțin unui ciclu elementar, rezultă că există un lanț elementar care le unește, deci G este conex. Să presupunem prin reducere la absurd că G nu este 2-conex, deci există un vîrf x astfel încît G_x nu este conex. Fie a, b două vîrfuri situate în componente diferite ale subgrafului G_x. Deoarece orice lanț elementar dintre a și b în graful G trece prin x, rezultă că nu poate exista un ciclu elementar în G care conține vîrfurile a și b, ceea ce contrazice b). Deci G este 2-conex și demonstrația este încheiată.

8.23. Fie $A = [a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, a_0]$ și $B = [b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}, b_0]$ două cicluri elementare de lungime maximă ale grafului G. Să presupunem, prin reducere la absurd, că aceste cicluri au cel mult un vîrf în comun. Fie mai întîi $a_0 = b_0$ unicul vîrf comun al celor două cicluri. Deoarece G este 2-conex, rezultă că mai există un lanț elementar cu o extremitate în mulțimea de vîrfuri $\{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ și cu cealaltă extremitate în mulțimea $\{b_1, \ldots, b_{r-1}\}$, care nu trece prin a_0. Fie $[a_p, x_1, \ldots, x_k, b_q]$ un astfel de lanț, unde $k \geqslant 0$, $p, q \neq 0$ și x_i nu aparține ciclurilor A sau B pentru $1 \leqslant i \leqslant k$. Putem considera $p \geqslant q$. Am obținut un ciclu elementar $[a_0, \ldots, a_p, x_1, \ldots, x_k, b_q, \ldots, b_{r-1}, a_0]$ care este mai lung ca A, ceea ce contrazice ipoteza.

Fie acum ciclurile A și B fără nici un vîrf comun. G fiind 2-conex, există două lanțuri elementare fără vîrfuri comune, care unesc fiecare un vîrf din A cu un vîrf din B.
Va exista un lanț elementar care face parte din ciclul A și avînd ca extremități extremitățile celor două lanțuri, de lungime mai mare sau egală cu $\frac{r}{2}$.
Obținem un rezultat analog pentru ciclul B. Cele două porțiuni din ciclurile A și B, împreună cu cele două lanțuri elementare care unesc un vîrf din A cu un vîrf din B, formează un ciclu elementar mai lung ca A, ceea ce contrazice iarăși ipoteza.

Rezultă că proprietatea este demonstrată prin reducere la absurd.

8.24. Pentru un graf G să notăm cu $m(G)$ numărul muchiilor grafului G. Obținem:

$$\sum_{x \neq y} m(G_i - x - y) = \binom{n-2}{2} m(G_i) \tag{1}$$

deoarece în suma din (1) fiecare muchie u contribuie cu o unitate pentru fiecare pereche $\{x, y\}$ de vîrfuri diferite de extremitățile lui u.

Deoarece există $\binom{n-2}{2}$ astfel de perechi de vîrfuri, rezultă (1) pentru $i = 1, 2$.

Conform ipotezei, pentru $x \neq y$, graful $G_1 - x - y$ este izomorf cu $G_2 - x - y$, deci ele au același număr de muchii și (1) implică $m(G_1) = m(G_2)$. Să considerăm acum suma:

$$\sum_{y \neq x_0} m(G_i - x_0 - y) \tag{2}$$

unde x_0 este un vîrf fixat. Dacă u este o muchie incidentă cu x_0, contribuția ei la suma (2) este nulă. În caz contrar, contribuția ei la suma (2) este egală cu $n - 3$, corespunzător cazurilor cînd y este diferit de x_0 și de extremitățile muchiei u.

Deci obținem:

$$(n-3)m(G_i) - \sum_{y \neq x_0} m(G_i - x_0 - y) = (n-3)d_{G_i}(x_0).$$

Deoarece membrul stîng al acestei egalități am văzut că nu depinde de i, rezultă că pentru orice vîrf x_0 avem $d_{G_1}(x_0) = d_{G_2}(x_0)$.
Deducem de asemenea:

$$m(G_i) - m(G_i - x - y) = d_{G_i}(x) + d_{G_i}(y) - \alpha_i(x, y), \tag{3}$$

unde $\alpha_i(x, y) = 0$ dacă vîrfurile x și y nu sînt adiacente în graful G_i și $\alpha_i(x, y) = 1$ dacă vîrfurile x și y sînt adiacente în graful G_i. Din (3) deducem că pentru orice $x \neq y$ avem $\alpha_1(x, y) = \alpha_2(x, y)$, adică grafurile G_1 și G_2 coincid.

8.25. Fie G graful cu n^2 vîrfuri care corespund pătratelor tablei de șah, două vîrfuri fiind adiacente dacă există o săritură în L a calului de pe un pătrat pe celălalt. Deoarece calul sare de pe un pătrat alb pe unul negru și de pe un pătrat negru pe unul alb, rezultă că acest graf este bipartit. Conform problemei 8.5, acest graf nu conține cicluri elementare cu un număr impar de vîrfuri, deci nu există un ciclu elementar cu n^2 vîrfuri. Traseul calului pe tabla de șah cu proprietățile cerute este deci imposibil.

9. PROBLEME EXTREMALE PENTRU GRAFURI ȘI REȚELE DE TRANSPORT

9.1. Fie V o mulțime formată din $\rho(G)$ muchii care acoperă toate vîrfurile grafului G. Deoarece V este un sistem minimal de muchii cu această proprietate, rezultă că suprimînd o muchie oarecare u din V rămîne un vîrf x neacoperit, deci x este extremitate numai pentru u. Rezultă că V induce un graf parțial al lui G ale cărui componente sînt grafuri-stea de forma $K_{1,p}$ cu $1 \leqslant p \leqslant n - 1$.

Numărul acestor componente este egal cu $n - |V| = n - \rho(G)$, deoarece fiecare componentă $K_{1,p}$ conține p muchii din V și $p + 1$ vîrfuri.

Dacă alegem cîte o muchie din fiecare componentă a grafului parțial indus de V, obținem un cuplaj cu $n - \rho(G)$ muchii, deci putem scrie:

$$\nu(G) \geqslant n - \rho(G) \text{ sau } \nu(G) + \rho(G) \geqslant n.$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie W un cuplaj format din $\nu(G)$ muchii care nu au două cîte două extremități comune. Aceste $\nu(G)$ muchii acoperă deci $2\nu(G)$ vîrfuri.

Să alegem cîte o muchie incidentă cu fiecare din cele $n - 2\nu(G)$ vîrfuri neacoperite de W.

Acest lucru este posibil, deoarece G nu conține vîrfuri izolate. În plus, vîrfurile neacoperite de W nu sînt adiacente două cîte două, deoarece aceasta ar contrazice maximalitatea lui W, deci cele $n - 2\nu(G)$ muchii sînt distincte două cîte două. Împreună cu mulțimea de muchii W, aceste muchii acoperă toate vîrfurile lui G și numărul lor este egal cu:

$$\nu(G) + n - 2\nu(G) = n - \nu(G),$$

deci obținem:

$$\rho(G) \leqslant n - \nu(G) \text{ sau } \nu(G) + \rho(G) \leqslant n.$$

(T. Gallai, Ann. Univ. Sci. R. Eötvös, Sectio Math., 2 (1959), 133—138).

9.2. Dacă notăm cu X mulțimea vîrfurilor grafului G, numărul tripletelor $\{x, y, z\}$ care nu sînt triunghiuri nici pentru G, nici pentru $\bar{G}$ și care au o singură latură cu o extremitate în vîrful $x \in X$ care să fie muchie a lui G este egal cu $d(x)(n - 1 - d(x))$.

Orice triplet $\{x, y, z\}$ care nu este triunghi în G sau $\bar{G}$ conține o muchie sau 2 muchii ale lui G. Să presupunem că $[x, y]$ este muchie a lui G, iar $[x, z]$ și $[y, z]$ sînt muchii ale lui $\bar{G}$. În suma

$$\sum_{x \in X} d(x)(n - 1 - d(x))$$

tripletul $\{x, y, z\}$ este numărul de 2 ori: o dată relativ la x și o dată relativ la y.

Dacă $[x, y]$ și $[y, z]$ sînt muchii ale lui G și $[x, z]$ este muchie a lui $\bar{G}$, atunci în suma scrisă tripletul $\{x, y, z\}$ este numărat tot de 2 ori: o dată relativ la x și o dată relativ la z. Deci numărul triunghiurilor în G și în $\bar{G}$ este egal cu:

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} d(x)(n - 1 - d(x)).$$

1) Dacă G este regulat de grad k, această formulă devine:

$$\binom{n}{3} - \frac{nk}{2}(n - k - 1).$$

2) Obținem $d(x)(n - 1 - d(x)) \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, deci numărul triunghiurilor în G și în $\bar{G}$ este minorat de

$$\binom{n}{3} - \frac{n}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Această margine este pozitivă pentru $n \geqslant 6$ și se anulează pentru $n = 5$. Dacă considerăm graful G egal cu ciclul C_5 cu 5 vîrfuri nici C_5 și nici $\bar{C}_5$ nu conțin nici un triunghi. Se poate arăta că această margine inferioară este atinsă pentru orice $n = 4p + 1$ (p natural).

(A. W. Goodman, Amer. Math. Monthly, 66(1959), 778—783).

9.3. Fie $G = (X, U)$ unde $|X| = n$ și $|U| = m$. Dacă $x, y \in X$ să notăm cu $A(x)$ mulțimea vîrfurilor adiacente cu x și cu $A(y)$ mulțimea vîrfurilor adiacente cu y.

Obținem:

$$|A(x) \cap A(y)| = |A(x)| + |A(y)| - |A(x) \cup A(y)| \geqslant d(x) + d(y) - n.$$

Dacă $[x, y] \in U$, există deci cel puțin $d(x) + d(y) - n$ vîrfuri care sînt adiacente și cu x și cu y, deci cel puțin $d(x) + d(y) - n$ triunghiuri ale grafului G conțin muchia $[x, y]$. Rezultă că G conține cel puțin

$$\frac{1}{3} \sum_{[x,y] \in U} (d(x) + d(y) - n)$$

triunghiuri, deoarece fiecare triunghi este numărat relativ la fiecare latură a sa.

În suma scrisă $d(x)$ apare de exact $d(x)$ ori pentru orice $x \in X$, deci suma scrisă este egală cu

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{x \in X} d(x)^2 - mn\right).$$

Aplicînd inegalitatea lui Cauchy — Schwartz, această ultimă sumă este minorată de

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{x \in X} d(x)\right)^2 - mn\right) = \frac{4m}{3n}\left(m - \frac{n^2}{4}\right),$$

deoarece $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$.

9.4. Oricare mulțime de trei vîrfuri $\{x, y, z\}$ ale grafului fie generează un circuit cu trei vîrfuri, fie există un vîrf x din care pleacă două arce (x, y) și (x, z). În acest ultim caz, oricare ar fi orientarea arcului dintre y și z cele trei vîrfuri induc un subgraf tranzitiv al grafului-turneu. Dacă notăm cu s_i numărul arcelor care ies din vîrful x_i al grafului pentru $i = 1, \ldots, n$, rezultă că numărul triunghiurilor tranzitive este egal cu

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{s_i}{2} \geqslant n \binom{(n-1)/2}{2} = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}.$$

aplicînd inegalitatea lui Jensen, deoarece $\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$. Deci numărul circuitelor cu 3 vîrfuri este majorat de $\binom{n}{3} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8} = \frac{(n+1)n(n-1)}{24} = \frac{1}{4}\binom{n+1}{3}$. Dacă n este impar, această margine superioară este atinsă, deoarece există un graf-turneu cu n vîrfuri cu proprietatea că $s_i = \frac{n-1}{2}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Vom demonstra această proprietate prin inducție după n. Pentru $n = 3$ vom considera circuitul cu 3 vîrfuri. Dacă proprietatea este adevărată pentru un graf-turneu cu n vîrfuri (n impar), care formează mulțimea X, vom orienta arcele dintre vîrfurile din X astfel încît din fiecare vîrf să iasă $\frac{n-1}{2}$ arce.

Vom considera două noi vîrfuri y și z și vom duce arcul (y, z). Fie $X = Y \cup Z$ o partiție a mulțimii X astfel încît $|Y| = \frac{n-1}{2}$ și $|Z| = \frac{n+1}{2}$.

Vom duce toate arcele de forma (y, x) și (x, z) pentru $x \in Y$ și toate arcele de forma (z, x) și (x, y) pentru $x \in Z$. Am obținut astfel un graf-turneu cu $n + 2$ vîrfuri pentru care $s_i = \frac{n+1}{2}$ pentru $i = 1, \ldots, n + 2$.

9.5. Un graf-turneu fiind un graf complet și antisimetric, vom arăta că în general orice graf orientat și complet are un drum hamiltonian.

Demonstrația acestei proprietăți se face prin inducție după numărul n al vîrfurilor grafului. Pentru $n = 2$ graful are 2 vîrfuri x și y. Deoarece este complet, există un arc între aceste două vîrfuri, de exemplu (x, y), care este tocmai drumul hamiltonian căutat.

Presupunem proprietatea adevărată pentru toate grafurile complete cu $n - 1$ vîrfuri și o vom demonstra pentru grafurile complete cu n vîrfuri.

Dacă graful G are vîrfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, subgraful format cu vîrfurile $x_1, \ldots, x_{n-1}$ este complet, deci conform ipotezei de inducție el conține un drum hamiltonian. Fie acest drum $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Deoarece graful este complet, există cel puțin un arc între x_1 și x_n. Dacă acest arc este (x_n, x_1), am obținut un drum hamiltonian pentru G și anume $(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Să presupunem contrariul și anume că există numai arcul (x_1, x_n).

Repetînd același raționament pentru perechea de vîrfuri x_n și x_{n-1}, dacă există arcul (x_{n-1}, x_n) putem forma drumul hamiltonian $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$. În caz contrar există numai arcul (x_n, x_{n-1}). Presupunînd că există numai arcele (x_1, x_n) și (x_n, x_{n-1}), deoarece x_n se leagă prin arce cu toate vîrfurile $x_2, \ldots, x_{n-2}$, vor exista printre acestea două vîrfuri vecine, x_k și x_{k+1} pentru care există arcele (x_k, x_n) și (x_n, x_{k+1}). Într-adevăr, din x_1 pleacă un arc în x_n, dar în x_{n-1}, ultimul vîrf al drumului, vine un arc din x_n, deci la un moment dat, plecînd din x_1 către x_{n-1}, sensul arcelor către x_n trebuie să se schimbe. Am găsit astfel și în acest caz un drum hamiltonian pentru graful G și anume: $(x_1, \ldots, x_k, x_n, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1})$.

Pentru a obține marginea superioară, să considerăm $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ arce ale grafului-turneu T cu n vîrfuri, care nu au două cîte două vîrfuri comune: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Dacă există un drum hamiltonian astfel ca cel de al $(2i - 1)$-lea arc să fie a_i pentru $i = 1, \ldots, m$, atunci acel drum hamiltonian este unic determinat.

Deci numărul drumurilor hamiltoniene este cel mult egal cu numărul de moduri în care putem alege m arce fără vîrfuri comune. Arcul a_1 poate fi ales în $\binom{n}{2}$ moduri, a_2 în $\binom{n-2}{2}$ moduri etc. Deci numărul de moduri în care poate fi ales șirul arcelor $a_1, \ldots, a_m$ este egal cu

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2m+2}{2} = \frac{n!}{2^m} \leqslant \frac{n!}{2^{n/2}}.$$

Dacă se notează cu $t(n)$ numărul maxim de drumuri hamiltoniene în clasa grafurilor-turneu cu n vîrfuri, se cunosc următoarele valori: $t(3) = 3$, $t(4) = 5$, $t(5) = 15$, $t(6) = 45$ și $t(7) = 189$ și dacă se notează

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t(n)}{n!}\right)^{1/n},$$

atunci α există și satisface inegalitățile: $0{,}5 = 2^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 2^{-3/4} < 0{,}6$. Conjectura lui Szele afirmă că $\alpha = 0{,}5$, rezultat care nu a fost demonstrat pînă în prezent. (T. Szele, Mat. Fiz. Lapok, 50(1943), 223—256).

9.6. Să presupunem că graful G are n vîrfuri, m muchii și nu conține nici un ciclu elementar cu 4 vîrfuri. Să numărăm perechile $\{x, y\}$ de vîrfuri care sînt ambele adiacente cu un al treilea vîrf z. Dacă vîrful z este fixat, avem $\binom{d(z)}{2}$ astfel de perechi. Dar fiecare pereche $\{x, y\}$ este numărată cel mult o dată, deoarece dacă ar fi numărată relativ la z_1 și la z_2 cu $z_1 \neq z_2$, atunci $[x, z_1, y, z_2, x]$ ar forma un ciclu cu 4 vîrfuri, ceea ce contrazice ipoteza. Deci putem scrie:

$$\sum_{z \in X} \binom{d(z)}{2} \leqslant \binom{n}{2},$$

unde X este mulțimea vîrfurilor grafului G. Funcția $\frac{x(x-1)}{2}$ fiind convexă, conform inegalității lui Jensen putem scrie:

$$\binom{n}{2} \geqslant \sum_{z \in X} \binom{d(z)}{2} \geqslant n \binom{\frac{2m}{n}}{2} = \frac{m(2m-n)}{n}, \text{ deci:}$$

$$m^2 - \frac{nm}{2} - \frac{n^2 - n^2}{4} \leqslant 0, \text{ de unde}$$

$$m \leqslant \frac{n}{4} - \sqrt{\frac{n^3}{4} - \frac{3n^2}{16}} = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}),$$

ceea ce contrazice ipoteza. Deci G conține un ciclu elementar cu 4 vîrfuri.

9.7. Fie $n = (k-1)q + r$ cu $0 \leqslant r \leqslant k-2$ și $(k-2)n = (k-1)p + s$, unde $0 \leqslant s \leqslant k-2$ și r, s numere întregi.

De aici se deduce că dacă $r = 0$ avem și $s = 0$, iar dacă $r \geqslant 1$ atunci $s = k - r - 1$.

Să presupunem prin reducere la absurd că numărul vîrfurilor x de grad $d(x) \leqslant p$ este mai mic ca m, celelalte vîrfuri y avînd gradul $d(y) \geqslant p + 1$. Deci presupunem că există o partiție $X \cup Y$ a mulțimii vîrfurilor grafului astfel încît $d(x) \leqslant p$ pentru orice vîrf $x \in X$, $d(y) \geqslant p + 1$ pentru orice vîrf $y \in Y$ și în plus $|X| < m$; $|Y| > n - m$.

Fie un vîrf $y_1 \in Y$ și să notăm prin $A(y_1)$ mulțimea vîrfurilor legate printr-o muchie cu y_1. În mulțimea $A(y_1) \cap Y$ vom alege un alt vîrf y_2. $A(y_1) \cap A(y_2)$ conține cel puțin:

$$|A(y_1) \cap A(y_2)| = |A(y_1)| + |A(y_2)| - |A(y_1) \cup A(y_2)| \geqslant 2(p+1) - n$$

vîrfuri.

Dacă am obținut mulțimile de vîrfuri $A(y_1), \ldots, A(y_{k-2})$ cu $y_j \in \bigcap_{i<j} A(y_i) \cap Y$ pentru $j = 1, \ldots, k-2$, vom demonstra că mulțimea $B \cap Y$ este nevidă, unde am notat $B = \bigcap_{i=1}^{k-2} A(y_i)$. Această proprietate va justifica totodată posibilitatea alegerii vîrfurilor $y_2, \ldots, y_{k-1}$. Într-adevăr, se obține ușor prin inducție că $|B| \geqslant (k-2)(p+1) - (k-3)n$.

Vom considera două cazuri:

1) $r = s = 0$. În acest caz $(k-2)(p+1) - (k-3)n = (k-2)((k-2)q + 1) - (k-3)(k-1)q = q + k - 2 \geqslant q$.

2) $r \geqslant 1$. Obținem:

$$(k-2)(p+1) - (k-3)n = (k-1)p - p + k - 2 - (k-1)p - s + n = n - p + k - s - 2 = \frac{n}{k-1} + \frac{(k-2)n}{k-1} - p + k - s - 2 = q + \frac{r}{k-1} + p + \frac{s}{k-1} - p + k - s - 2 = q + \frac{r+s}{k-1} + k - s - 2 \geqslant q + 1,$$

deoarece $r + s = k - 1$ și $k - s - 2 \geqslant 0$.

Deci în ambele cazuri B conține cel puțin $m = \{n/(k-1)\}$ vîrfuri.

Dacă am avea $B \cap Y = \emptyset$, am obține $B \subset X$, ceea ce nu este posibil, deoarece $|X| < m$ și $|B| \geqslant m$. Deci există un vîrf $y_{k-1} \in B \cap Y$ care are gradul $d(y_{k-1}) \geqslant p + 1$. Astfel obținem:

$$\left| \bigcap_{i=1}^{k-1} A(y_i) \right| \geqslant (k-1)(p+1) - (k-2)n = k - 1 - s > 0,$$

ceea ce implică existența unui vîrf $y_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} A(y_i)$.

Din modul de construcție, vîrfurile $y_1, y_2, \ldots, y_k$ formează un subgraf complet cu k vîrfuri, ceea ce contrazice ipoteza, deci există cel puțin m vîrfuri de grad mai mic sau egal cu p.

(I. Tomescu, Studii și Cercet. matem., 3(31) (1979), 353—358), care extinde lema lui Zarankiewicz (K. Zarankiewicz, Colloquium Math., 1(1947), 10—15).

9.8. Să definim un graf G cu 1001 vîrfuri: $x_1, \ldots, x_{1001}$, în modul următor: legăm vîrfurile x_i și x_j printr-o muchie dacă persoana i și persoana j din mulțimea M nu se cunosc între ele.

Deoarece orice submulțime formată din 11 persoane conține cel puțin două persoane care se cunosc între ele, rezultă că G nu conține subgrafuri complete cu 11 vîrfuri.

Să aplicăm rezultatul din problema precedentă pentru $n = 1001$ și $k = 11$.

Obținem că G conține cel puțin $m = 101$ vîrfuri cu gradele mai mici sau egale cu $p = 900$, deci în graful complementar $\bar{G}$ există cel puțin 101 vîrfuri cu gradele mai mari sau egale cu 1000—900 = 100. Am obținut rezultatul căutat, deoarece în $\bar{G}$ vîrfurile x_i și x_j sînt adiacente dacă și numai dacă persoanele i și j se cunosc între ele.

9.9. Vom demonstra teorema prin inducție după n. Pentru $n = 1, \ldots, k-1$ graful cu n vîrfuri care are un număr maxim de muchii și nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri este graful complet K_n și el are forma indicată, fiecare clasă conținînd cîte un singur vîrf. Să presupunem că teorema este adevărată pentru $n' \leqslant n - 1$. Dacă graful G are n vîrfuri și nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri, din problema 9.7 deducem existența unui vîrf x cu gradul $d(x) \leqslant p = [(k-2)n/(k-1)]$.

Să considerăm subgraful G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a tuturor muchiilor care îl au pe x drept una dintre extremități. Subgraful G_x are $n - 1$ vîrfuri, nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri și poate conține sau nu un număr maxim de muchii relativ la această proprietate. Dacă G_x nu conține un număr maxim de muchii, îl înlocuim printr-un graf cu $n - 1$ vîrfuri care nu conține subgrafuri complete cu k vîrfuri și are un număr maxim de muchii. Conform ipotezei de inducție, acest graf constă din $k - 1$ clase de vîrfuri, dintre care r' clase conțin fiecare $t' + 1$ vîrfuri, în timp ce fiecare din clasele rămase conțin t' vîrfuri, unde $n - 1 = (k-1)t' +$

$+ r'$ și $0 \leqslant r' \leqslant k-2$. Fiecare vîrf este unit prin muchii cu toate vîrfurile care nu aparțin aceleiași clase cu el.

Să adăugăm vîrful x la o clasă care conține t' vîrfuri și să-l unim cu toate vîrfurile care nu aparțin clasei lui x. Obținem astfel un graf cu n vîrfuri, fără subgrafuri complete cu k vîrfuri, care este unic pînă la un izomorfism. Gradul vîrfului x în graful astfel obținut este egal cu $n-1-t'=n-1-[(n-1)/(k-1)]$. Dar un calcul simplu ne arată că $n-1-[(n-1)/(k-1)]=[(k-2)n/(k-1)]$, deci graful cu n vîrfuri fără subgrafuri complete cu k vîrfuri, care conține un număr maxim de muchii trebuie să aibă structura cerută.

Obținem $M(n, k)=\binom{n}{2}-r\binom{t+1}{2}-(k-1-r)\binom{t}{2}=\frac{1}{2}(n^2-n-rt(t+1)-(k-1-r)t(t-1))$, unde $t=\frac{n-r}{k-1}$. Deci:

$$M(n, k)=\frac{1}{2}(n^2-n-t(2r+t(k-1)-k+1))=\frac{1}{2}\left(n^2-n-\frac{n-r}{k-1}(2r+n-r-k+1)\right)=\frac{1}{2}\left(n^2-n-\frac{(n-r)(n+r-(k-1))}{k-1}\right)=$$

$$=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{n^2-r^2}{2}+\binom{r}{2}.$$

9.10. Să arătăm mai întîi că oricum am alege 4 puncte A, B, C, D din M, există cel puțin două dintre ele care se găsesc la o distanță mai mică sau egală cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dacă trei dintre ele sînt coliniare, există o distanță mai mică sau egală cu $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ și proprietatea este demonstrată.

În caz contrar, vom arăta că configurația formată din cele patru puncte conține un triunghi cu un unghi de cel puțin 90°. Există două cazuri posibile:

a) Trei puncte, fie A, B, C formează un triunghi cu D punct interior. Suma unghiurilor din D este egală cu 360°, deci cel puțin un unghi este mai mare sau egal cu 120°;

b) Cele patru puncte formează un patrulater convex. Suma unghiurilor patrulaterului este 360° deci cel puțin un unghi este mai mare sau egal cu 90°.

Fie ABC triunghiul cu $A \geqslant 90°$. Avem:

$$a^2 \geqslant b^2+c^2 \geqslant 2 \min (b^2, c^2).$$

Dacă $b \geqslant c$ obținem $a^2 \geqslant 2c^2$ sau $c^2 \leqslant \frac{a^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ și deci $c \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vom defini un graf G care are ca vîrfuri cele $3n$ puncte, două vîrfuri fiind legate printr-o muchie dacă distanța dintre ele este mai mare ca $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Proprietatea demonstrată ne arată că acest graf nu conține subgrafuri complete cu 4 vîrfuri, deci numărul de muchii este cel mult egal cu $M(3n, 4)=3n^2$, conform problemei anterioare.

Cele $3n^2$ distanțe mai mari ca $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pot fi alese în intervalul $(1-\varepsilon, 1)$ pentru orice $\varepsilon>0$, grupînd cîte n puncte suficient de apropiate de vîrfurile unui triunghi echilateral de latură egală cu 1.

9.11. Demonstrația rezultă direct din teorema lui Turán, deoarece $M(2n, 3) = n^2$. Graful care realizează acest număr maxim de muchii și nu conține triunghiuri este graful bipartit complet $K_{n,n}$.

9.12. Vom arăta că pentru orice $n \geqslant 2$ numărul maxim de subgrafuri complete maximale (clici) în clasa grafurilor cu n vîrfuri, număr notat $f(n)$, este egal cu: $3^{n/3}$ pentru $n \equiv 0 \pmod 3$; $4 \cdot 3^{(n-1)/3-1}$ pentru $n \equiv 1 \pmod 3$; $2 \cdot 3^{(n-2)/3}$ pentru $n \equiv 2 \pmod 3$.

Pentru $2 \leqslant n \leqslant 4$ obținem prin simpla enumerare expresia lui $f(n)$, deoarece pentru $n = 2$ și $n = 3$ numărul maxim de clici se obține pentru grafurile formate din vîrfuri izolate, iar pentru $n = 4$ pentru graful cu toate vîrfurile izolate sau pentru graful bipartit complet $K_{2,2}$.

Fie G un graf cu $n \geqslant 5$ vîrfuri care conține $f(n)$ clici. G conține cel puțin două vîrfuri neadiacente, x și y deoarece în caz contrar G este graful complet cu n vîrfuri K_n care conține o singură clică, ceea ce contrazice maximalitatea lui G.

Să notăm cu $V(x)$ mulțimea vîrfurilor adiacente cu x în G și cu $G(x, y)$ graful obținut din G prin suprimarea tuturor muchiilor incidente cu x și înlocuirea lor cu muchii de la vîrful x la fiecare vîrf din mulțimea $V(y)$.

Să notăm cu G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x, cu $a(x)$ numărul subgrafurilor complete incluse în mulțimea $V(x)$, maximale relativ la subgraful G_x și cu $c(x)$ numărul clicilor lui G care îl conțin pe x.

Prin suprimarea muchiilor incidente cu x dispar $c(x) - a(x)$ clici, iar prin unirea lui x prin muchii cu toate vîrfurile din $V(y)$ apar $c(y)$ clici, deci dacă notăm cu $c(G)$ numărul clicilor grafului G, obținem:

$$c(G(x, y)) = c(G) + c(y) - c(x) + a(x).$$

Putem presupune că $c(y) \geqslant c(x)$, deoarece în caz contrar vom considera graful $G(y, x)$.

Deoarece $c(G)$ este maxim, rezultă că $c(G(x, y)) \leqslant c(G)$ sau $c(y) = c(x)$ și $a(x) = 0$, ceea ce implică $c(G(x, y)) = c(G)$ și graful $G(x, y)$ conține același număr maxim de clici, egal cu $f(n)$, ca și graful G.

Rezultă de asemenea că

$$c(G(y, x)) = c(G) + c(x) - c(y) + a(y),$$

deci deoarece $c(x) = c(y)$ se obține $a(y) = 0$ și deci $c(G(x, y)) = c(G(y, x)) = c(G)$.

Fie x un vîrf oarecare al grafului G și $y_1, \ldots, y_p$ vîrfurile neadiacente cu x. Vom transforma graful G în graful $G_1 = G(y_1, x)$, apoi graful G_1 în $G_2 = G_1(y_2, x)$, ..., graful G_{p-1} în $G_p = G_{p-1}(y_p, x)$ cu conservarea numărului $f(n)$ de clici. Graful G_p are proprietatea că vîrfurile $x, y_1, \ldots, y_p$ nu sînt unite între ele prin muchii, dar $V(x) = V(y_1) = \ldots = V(y_p)$. Dacă $V(x) = \emptyset$, ne oprim. În caz contrar vom considera un vîrf din $V(x)$ și vom repeta această construcție.

În final ajungem la un graf G^* multipartit complet, cu proprietatea că vîrfurile sale pot fi partiționate în k clase care conțin respectiv $n_1, \ldots, n_k$ vîrfuri, două vîrfuri fiind adiacente dacă și numai dacă ele nu aparțin aceleiași clase și astfel încît $c(G^*) = f(n)$. Dar $c(G^*) = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$, de unde rezultă că:

$$f(n) = \max_k \max_{n_1 + \ldots + n_k = n} n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Să presupunem că $f(n) = m_1 m_2 \dots m_p$, unde $m_1 + \dots + m_p = n$. Este clar că $\max(m_1, \dots, m_p) \leqslant 4$ deoarece dacă există un termen, fie $m_1 \geqslant 5$, avem $3(m_1 - 3) > m_1$ sau $2m_1 > 9$, deci produsul $m_1 \dots m_p$ nu ar fi maxim. Nu pot exista doi factori egali cu 4, deoarece $4 \cdot 4 < 3 \cdot 3 \cdot 2$; la fel nu pot exista trei factori egali cu 2, deoarece $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$.

De asemenea avem $-1 \leqslant m_i - m_j \leqslant 1$ pentru orice $i, j = 1, \dots, p$, căci dacă de exemplu: $m_i \geqslant m_j + 2$ obținem $m_i m_j < (m_i - 1)(m_j + 1) = m_i m_j + m_i - m_j - 1$. Deci toți factorii $m_1, \dots, m_p$ sînt egali cu 3 pentru $n \equiv 0 \pmod 3$, un singur factor este egal cu 4 (sau doi factori egali cu 2), restul fiind egali cu 3 pentru $n \equiv 1 \pmod 3$ și un factor egal cu 2, restul fiind egali cu 3 pentru $n \equiv 2 \pmod 3$.

(J.W. Moon, L. Moser, Israel J. of Mathematics, 1,3 (1965), 23—28).

9.13. Să arătăm mai întîi că în urma aplicării algoritmului, cînd ajungem la o mulțime de $n - 1$ muchii care nu conține cicluri, am găsit un arbore cu n vîrfuri.

Într-adevăr, să presupunem prin reducere la absurd că graful obținut nu este conex și are $p \geqslant 2$ componente conexe care conțin respectiv $n_1, \dots, n_p$ vîrfuri. Deoarece aceste componente conexe nu conțin cicluri, fiecare este un arbore. Rezultă că numărul de muchii din fiecare componentă este egal respectiv cu $n_1 - 1, \dots, n_p - 1$ și putem scrie:

$$n_1 - 1 + \dots + n_p - 1 = n - p = n - 1,$$

de unde rezultă $p = 1$, deci graful obținut este conex și fără cicluri, deci este arbore.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că arborele parțial A obținut în urma aplicării acestui algoritm nu este minim, deci există un alt arbore A_1 de cost $c(A_1) < c(A)$, unde prin $c(A)$ am notat suma costurilor muchiilor lui A.

Să presupunem că muchiile lui A sînt $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$, indicele corespunzînd ordinei de obținere a muchiei cu algoritmul indicat și că prima muchie a arborelui A din acest șir, care nu este muchie a lui A_1, este muchia u_k. Să adăugăm muchia u_k la arborele A_1.

În graful astfel format, pe care îl notăm G_1, apare un ciclu unic, format din u_k și din lanțul unic al arborelui A_1 care leagă extremitățile lui u_k.

Acest ciclu conține măcar o muchie v_i care nu aparține arborelui A, deoarece în caz contrar A ar conține un ciclu, ceea ce este imposibil. Dacă suprimăm muchia v_i obținem tot un arbore A_2, deoarece graful obținut din G_1 prin suprimarea muchiei v_i nu conține cicluri și are $n - 1$ muchii, deci este un arbore conform raționamentului anterior.

Costul acestui arbore este egal cu

$$c(A_2) = c(A_1) + c(u_k) - c(v_i).$$

Însă din descrierea algoritmului rezultă că u_k este muchia de cost minim care nu formează cicluri cu muchiile $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$. Însă nici muchia v_i nu formează cicluri cu aceste muchii, deoarece A_1 este arbore. Rezultă $c(u_k) \leqslant c(v_i)$, deci $c(A_2) \leqslant c(A_1)$. Repetînd acest procedeu vom înlocui toate muchiile arborelui A_1 care nu sînt muchii ale arborelui A prin muchii ale arborelui A, obținînd un șir de arbori: $A_2, A_3, \dots, A_r = A$, astfel încît costurile lor să verifice inegalitățile:

$$c(A_1) \geqslant c(A_2) \geqslant \dots \geqslant c(A_r) = c(A),$$

deci $c(A_1) \geqslant c(A)$. Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece am presupus că $c(A_1) < c(A)$, deci A este arbore minim al lui G și algoritmul este justificat.

9.14. Să presupunem că ar exista doi arbori de cost minim, A și A_1, deci putem găsi o muchie u a lui A care nu este muchie a lui A_1. Să considerăm lanțul din A_1, care unește extremitățile muchiei u. Există o muchie v a acestui lanț care unește două vîrfuri situate în cele două componente ale grafului obținut din A prin suprimarea muchiei u. Rezultă că graful A_2 obținut din A prin suprimarea muchiei u și inserarea muchiei v, cît și graful A_3 obținut din A_1 prin suprimarea muchiei v și inserarea muchiei u sînt arbori. Deoarece $c(u) \neq c(v)$ obținem că:

$$\min\,(c(A_2),\ c(A_3)) < c(A),$$

deoarece $c(A_2) = c(A) - c(u) + c(v)$ și $c(A_3) = c(A) + c(u) - c(v)$, ceea ce contrazice ipoteza că $c(A)$ este minim.

Deci arborele minim este unic.

9.15. Dacă C este un subgraf complet de cardinal maxim al lui G, să alegem $x_i = \frac{1}{k}$ dacă $i \in C$ și $x_i = 0$ pentru $i \notin C$, dacă $X = \{1, \ldots, n\}$. Obținem $\sum_{[i,j]\in U} x_i x_j = \frac{1}{k^2}\binom{k}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, deci $f(G) = \max \sum_{[i,j]\in U} x_i x_j \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, vom proceda prin inducție după $n \geqslant 1$. Dacă $n = 1$, deducem $k = 1$ și $f(G) = 0$, deci avem egalitate. Să presupunem că $f(G) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ pentru toate grafurile cu cel mult $n - 1$ vîrfuri și fie G un graf cu n vîrfuri. Dacă maximul notat prin $f(G)$ se atinge pentru $x_i = 0$, unde $1 \leqslant i \leqslant n$, găsim $f(G) = f(G')$, unde G' este graful obținut din G prin suprimarea vîrfului i și a muchiilor incidente cu acest vîrf. Utilizînd ipoteza de inducție pentru G' găsim:

$$f(G) = f(G') = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k'}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

deoarece $k' \leqslant k$.

Să presupunem că $f(G)$ se atinge pentru toate variabilele $x_i > 0$.

Dacă G nu este un graf complet, există două vîrfuri neadiacente, de exemplu 1 și 2.

Notînd $F(G) = F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{[i,j]\in U} x_i x_j$, să alegem $0 < c \leqslant x_1$ și obținem:

$F(x_1 - c,\ x_2 + c,\ x_3, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + c\left(\sum_{i\in A} x_i - \sum_{i\in B} x_i\right)$, unde A reprezintă mulțimea vîrfurilor adiacente cu vîrful 2, care nu sînt adiacente cu vîrful 1 în G, iar B reprezintă mulțimea vîrfurilor lui G, care sînt adiacente cu vîrful 1 și nu sînt adiacente cu vîrful 2. Trebuie să avem $\sum_{i\in A} x_i = \sum_{i\in B} x_i$, deoarece dacă $\sum_{i\in A} x_i > \sum_{i\in B} x_i$ obținem $F(x_1 - c,\ x_2 + c,\ x_3, \ldots, x_n) > F(x_1, \ldots, x_n)$, ceea ce este contradictoriu, iar dacă există inegalitatea contrară, avem $F(x_1 + c,\ x_2 - c,\ x_3, \ldots, x_n) > F(x_1, \ldots, x_n)$ pentru orice $0 < c \leqslant x_2$, ceea ce contrazice maximalitatea lui $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Alegînd $c = x_1$, găsim:

$$F(0,\ x_1 + x_2,\ x_3, \ldots, x_n) = F(x),$$

deci maximul se atinge pentru subgraful G' obținut din G prin suprimarea vîrfului 1. Am regăsit cazul anterior, cînd una dintre variabile ia valoarea zero și deci utilizînd ipoteza de inducție pentru G' deducem $f(G) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Dacă $G = K_n$, găsim

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{1}{2}\left((x_1 + \ldots + x_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

și inegalitatea este demonstrată și în acest caz.

(T.S. Motzkin, E.G. Straus, Canadian J. of Mathematics, 4, 17 (1965), 533—540.)

9.16. Să presupunem că arcele $u_1, \ldots, u_m$ ale lui G sînt astfel numerotate încît $c(u_1) \geqslant c(u_2) \geqslant \ldots \geqslant c(u_m)$. Fie k cel mai mic indice cu proprietatea că mulțimea de arce $\{u_1, \ldots, u_k\}$ conține arcele unui drum $D_0 = (a, \ldots, b)$. Deoarece $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ nu conține toate arcele nici unui drum de la a la b, rezultă că $C_0 = \{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m\}$ este o (a, b)-tăietură astfel încît $C_0 \cap A(D_0) = \{u_k\}$. Am notat cu $A(D_0)$ mulțimea arcelor drumului D_0. Obținem:

$$\min_{u \in D_0} c(u) = c(u_k) \text{ și } \max_{u \in C_0} c(u) = c(u_k). \tag{1}$$

Dacă C este o (a, b)-tăietură oarecare, rezultă $C \cap A(D_0) \neq \emptyset$ și fie $u_i \in C \cap A(D_0)$. Deoarece $A(D_0) \subset \{u_1, \ldots, u_k\}$ obținem $i \leqslant k$, deci:

$$\max_{u \in C} c(u) \geqslant c(u_i) \geqslant c(u_k). \tag{2}$$

Dacă $D = (a, \ldots, b)$ este un drum oarecare de la a la b avem $A(D) \cap C_0 \neq \emptyset$ și fie $u_i \in A(D) \cap C_0$. Ținînd seama de definiția lui C_0, rezultă că $i \geqslant k$, deci

$$\min_{u \in D} c(u) \leqslant c(u_k). \tag{3}$$

Din (1) și (3) deducem că $\max\limits_{D} \min\limits_{u \in D} c(u) = c(u_k)$ și din (1) și (2) deducem că $\min\limits_{C} \max\limits_{u \in C} c(u) = c(u_k)$, ceea ce demonstrează proprietatea cerută.

(J. Edmonds, D.R. Fulkerson, J. Combinatorial Theory, 8(1970), 299.)

9.17. Dacă g este o funcție care satisface cele două condiții din enunț și $D = (a, x_1, \ldots, x_k, b)$ este un drum în graful G, putem scrie:

$$c(D) = c(a, x_1) + c(x_1, x_2) + \ldots + c(x_k, b) \geqslant$$

$$\geqslant g(x_1) + (g(x_2) - g(x_1)) + \ldots + (g(b) - g(x_k)) = g(b),$$

ceea ce implică $\min\limits_{D} c(D) \geqslant \max\limits_{g} g(b)$.

Dacă găsim un drum $D = (a, \ldots, b)$ și o funcție g care satisface cele două condiții, astfel încît $c(D) = g(b)$, rezultă și inegalitatea de sens contrar, deci egalitatea va fi demonstrată.

Vom prezenta un procedeu inductiv de obținere a funcției g în vîrfurile grafului G. Definim mai întîi $g(a) = 0$. Să presupunem că g a fost definită pe o mulțime de vîrfuri $S \subset X$ cu $a \in S$ și are proprietatea că pentru orice vîrf $x \in S$ există un drum $D_x = (a, \ldots, x)$ în subgraful generat de S cu $c(D_x) = g(x)$.

Vom considera toate arcele (x, y) cu $x \in S$ și $y \notin S$ și vom alege unul pentru care suma $g(x) + c(x, y)$ este minimă. Vom defini $g(y) = g(x) + c(x, y)$, deci funcția g este definită acum pe mulțimea de vîrfuri $S \cup \{y\}$. Să arătăm că pentru orice arc (z, u) din subgraful generat de $S \cup \{y\}$ se verifică în continuare inegalitatea:

$$g(u) - g(z) \leqslant c(z, u). \tag{1}$$

Dacă $u, z \in S$ această inegalitate este verificată conform ipotezei de inducție. Dacă $z \in S$ și $u = y$, din modul de alegere a arcului (x, y) putem scrie:

$$g(y) = g(x) + c(x, y) \leqslant g(z) + c(z, y)$$

și (1) este în continuare verificată.

Fie $u \in S$ și $z = y$. În acest caz vom arăta că $g(u) \leqslant g(y)$, deci $g(u) - g(y) \leqslant 0 \leqslant c(y, u)$ și (1) este verificată. Pentru aceasta, vom arăta de asemenea prin inducție că funcția g ia valori crescătoare în ordinea alegerii vîrfurilor grafului G prin procedura descrisă. Această proprietate are loc pentru primul vîrf c selectat după a, deoarece $g(c) = g(a) + c(a, c) = c(a, c) \geqslant 0$, deci $g(c) \geqslant g(a)$.

Presupunînd că această proprietate are loc pentru orice mulțime de vîrfuri construită prin procedura descrisă, de cardinal mai mic sau egal cu $|S|$, să presupunem prin reducere la absurd că există un vîrf $u \in S$ astfel încît $g(y) < g(u)$.

Deoarece $g(y) = g(x) + c(x, y) \geqslant g(x)$, rezultă că $g(x) \leqslant g(y) < g(u)$, deci conform ipotezei de inducție, în mulțimea S vîrful x a fost selectat înaintea vîrfului u. Fie $M \subset S$ cea mai mare mulțime relativ la incluziune, construită prin procedura descrisă, care îl conține pe x și nu îl conține pe u. Deci la pasul următor se adaugă la M vîrful u. Există deci $v \in M$ astfel încît:

$$g(u) = g(v) + c(v, u).$$

Deoarece $x, v \in M$, inegalitatea:

$$g(y) = g(x) + c(x, y) < g(v) + c(v, u) = g(u)$$

contrazice alegerea vîrfului u ca următor vîrf în care funcția g este definită conform procedurii descrise. Deci am demonstrat că funcția g ia valori crescătoare în ordinea alegerii vîrfurilor grafului G, deci (1) este verificată și funcția g satisface cele două condiții impuse. Conform ipotezei de inducție, există un drum $D_x = (a, \ldots, x)$ în subgraful generat de S cu $c(D_x) = g(x)$. Rezultă că adăugînd arcul (x, y) la drumul D_x obținem drumul $D_y = (a, \ldots, x, y)$, cu valoarea:

$$c(D_y) = c(D_x) + c(x, y) = g(x) + c(x, y) = g(y).$$

Deci g a fost definită pe $S \cup \{y\}$, satisface cele două condiții pe această mulțime și pentru orice $x \in S \cup \{y\}$ există un drum $D_x = (a, \ldots, x)$ în subgraful generat de $S \cup \{y\}$ care verifică $c(D_x) = g(x)$. Raționamentul prin inducție este încheiat. Rezultă că g poate fi definită pe mulțimea X de vîrfuri în mod unic, deci în particular în b și am găsit un drum $D = (a, \ldots, b)$ și o funcție g care verifică $c(D) = g(b)$.

Dacă $c(u)$ este lungimea arcului $u \in U$, $\min_D c(D)$ unde $D = (a, \ldots, b)$ parcurge mulțimea drumurilor de la a la b este distanța minimă dintre vîrfurile a și b în graful G. Procedura descrisă construiește în mod unic o funcție $g: X \to R$ cu proprietatea că $g(x) \geqslant 0$, deoarece $g(a) = 0$ și în conti-

nuare am văzut că g ia numai valori crescătoare. În plus, pentru orice vîrf $b \neq a$ obținem:

$$\min_{D} c(D) = g(b),$$

deci procedura descrisă este în același timp un algoritm pentru găsirea distanțelor minime de la un vîrf fixat a la toate vîrfurile $b \neq a$ ale grafului G.

9.18. Să calculăm în două moduri suma:

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{u \in \omega^-(x)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(x)} f(u) \right). \tag{1}$$

Din cauza condiției (C) de conservare a fluxului pentru orice vîrf $x \neq a, b$, termenul corespunzător al sumei (1) este nul. Deci suma (1) se reduce la $\sum_{u \in \omega^-(b)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(a)} f(u)$, deoarece $\omega^-(a) = \omega^+(b) = \emptyset$.

Însă deoarece fiecare arc $(x, y) \in U$ aparține atît mulțimii $\omega^+(x)$ cît și mulțimii $\omega^-(y)$, rezultă că regrupînd termenii putem scrie (1) sub forma:

$$\sum_{u \in U} (f(u) - f(u)) = 0,$$

de unde rezultă (1).

Pentru a demonstra 2), vom considera suma:

$$\sum_{x \in A} \left(\sum_{u \in \omega^-(x)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(x)} f(u) \right). \tag{2}$$

Obținem că pentru orice vîrf $x \neq b$, termenul corespunzător din (2) este nul, deci suma (2) se reduce la $\sum_{u \in \omega^-(b)} f(u) = f_b$, deoarece $\omega^+(b) = \emptyset$ și $a \notin A$.

Regrupînd termenii, putem scrie (2) sub forma:

$$\sum_{u \in U_A} (f(u) - f(u)) + \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u) = \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u),$$

unde U_A este mulțimea arcelor u care au ambele extremități în mulțimea A. Pe de altă parte, dacă arcul $u \in \omega^-(A)$, fluxul $f(u)$ apare în suma (2) cu semnul plus, iar dacă $u \in \omega^+(A)$, fluxul $f(u)$ apare în (2) cu semnul minus, deoarece vor exista vîrfurile $x_1, x_2 \in A$ astfel încît $u \in \omega^-(x_1)$, respectiv $u \in \omega^+(x_2)$.

Comparînd cele două expresii ale sumei (2), rezultă că:

$$f_b = \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u) \leqslant \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) \leqslant \sum_{u \in \omega^-(A)} c(u) = c(\omega^-(A)),$$

din cauza condiției (M) de mărginire a fluxului pe fiecare arc al rețelei de transport, fluxul avînd valori nenegative.

9.19. Fie v un lanț care unește intrarea a cu ieșirea b. Vom nota cu v^+ mulțimea arcelor lui v orientate în același sens cu sensul de parcurgere a lanțului v de la a către b, iar cu v^- mulțimea arcelor lanțului v orientate în sens invers cu sensul de parcurgere a lanțului v de la a către b.

Fie $\varepsilon = \min \left(\min_{u \in v^+} (c(u) - f(u)), \min_{u \in v^-} f(u) \right)$.

Dacă $\varepsilon > 0$ putem mări fluxul f_b astfel:

Vom mări cu ε fluxul pe fiecare arc $u \in v^+$ și îl vom diminua cu ε pe fiecare arc $u \in v^-$.

Din modul de definire a lui ε obținem un nou flux f', care verifică:

$$0 \leqslant f'(u) \leqslant c(u)$$

pentru fiecare arc $u \in U$ și în plus condiția de conservare în fiecare vîrf $x \neq a$, b este în continuare verificată. Fluxul la ieșire crește deoarece $f'_b = f_b + \varepsilon > f_b$, ultimul arc al lanțului v care intră în b, aparținînd mulțimii v^+.

Un lanț v pentru care $\varepsilon = 0$ se numește saturat. Deci dacă un flux f realizează $\max f_b$, nu vor exista lanțuri nesaturate de la a la b, în caz contrar fluxul putînd fi mărit în b.

Dacă f este un flux maxim în rețeaua G, să considerăm toate lanțurile elementare de la a la b. Vom suprima toate arcele u pentru care există un lanț elementar v astfel încît $u \in v^+$ și $f(u) = c(u)$ sau $u \in v^-$ și $f(u) = 0$, u fiind primul arc întîlnit cu aceste proprietăți cînd ne deplasăm pe lanțul v de la a către b.

Graful parțial astfel obținut are cel puțin două componente conexe, deoarece în caz contrar ar mai exista un lanț nesaturat de la a la b, ceea ce contrazice maximalitatea fluxului f. Una dintre aceste componente este formată dintr-o submulțime de vîrfuri A care conține ieșirea b și nu conține intrarea a.

Deci A definește o tăietură $\omega^-(A)$. Toate arcele $u \in \omega^-(A)$ au aceeași orientare cu lanțurile de la a către b, astfel încît $f(u) = c(u)$.

La fel, toate arcele $u \in \omega^+(A)$ au o orientare opusă orientării lanțurilor respective de la a către b care folosesc aceste arce, astfel încît $f(u) = 0$ pentru orice $u \in \omega^+(A)$.

Arcele din $\omega^-(A)$, respectiv din $\omega^+(A)$ au fost arce suprimate din rețea, deoarece în caz contrar componenta conexă A nu ar fi maximală în raport cu incluziunea, ceea ce contrazice definiția unei componente conexe.

Conform problemei anterioare obținem:

$$f_b = \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u) = \sum_{u \in \omega^-(A)} c(u) = c(\omega^-(A)).$$

Dar am văzut că pentru orice flux f și orice tăietură indusă de mulțimea $A \subset X$ astfel încît $a \notin A$ și $b \in A$ există inegalitatea:

$$f_b \leqslant c(\omega^-(A)),$$

conform problemei precedente.

Deoarece am găsit un flux maxim f și o tăietură $\omega^-(A)$ care fac ca această inegalitate să devină egalitate, rezultă că tăietura $\omega^-(A)$ are capacitate minimă, egală cu valoarea maximă a fluxului la ieșire.

9.20. Este clar că algoritmul descris are un număr finit de pași, majorat de exemplu de $\sum_{u \in \omega^-(b)} c(u)$.

Într-adevăr, problema 9.18 ne spune că $\max_f f_b \leqslant c(\omega^-(A))$, unde $\omega^-(A)$ este o tăietură oarecare a rețelei. Putem lua $A = \{b\}$ și deci $\omega^-(A) = \omega^-(b)$. Obținem că $\max_f f_b \leqslant c(\omega^-(A)) = \sum_{u \in \omega^-(b)} c(u)$. Inițial se pleacă cu fluxul nul pe fiecare arc, deci $f_b = 0$ și la fiecare pas fluxul f_b crește cu ε. Deoarece capacitățile arcelor sînt numere întregi și nenegative, rezultă că valorile fluxului pe arce și valorile lui ε sînt numere întregi, iar $\varepsilon > 0$ implică ε întreg, $\varepsilon \geqslant 1$. Deci la fiecare pas fluxul f_b crește cu cel puțin o unitate, deci numărul de pași ai algoritmului este majorat de capacitatea unei tăieturi.

Să arătăm că în momentul cînd nu mai putem marca ieșirea b, fluxul obținut are o valoare la ieșire maximă, iar mulțimea arcelor care unesc vîrfurile marcate cu vîrfurile nemarcate constituie o tăietură de capacitate minimă.

Pentru aceasta, să notăm cu A mulțimea vîrfurilor care nu pot fi etichetate prin algoritmul descris. Obținem $a \in A$ și $b \notin A$, deoarece am presupus că ieșirea rețelei nu poate fi marcată.

Deci $\omega^-(A)$ constituie o tăietură a rețelei de transport. Pentru orice arc $u \in \omega^-(A)$ obținem $f(u) = c(u)$, deoarece din $u = (x, y)$ rezultă că $x \notin A$, $y \in A$. Dacă $f(u) < c(u)$, vîrful y ar putea fi etichetat, ceea ce contrazice faptul că $y \in A$.

Pentru orice arc $u \in \omega^+(A)$ obținem $f(u) = 0$, deoarece dacă $u = (y, x)$ rezultă că $y \in A$ și $x \notin A$. Dacă $f(u) > 0$, vîrful y ar putea fi etichetat plecînd de la vîrful etichetat x, ceea ce contrazice faptul că $y \in A$.

Aplicînd relația 2) din problema 9.18, putem scrie:

$$f_b = \sum_{u \in \omega^-(A)} f(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} f(u) = \sum_{u \in \omega^-(A)} c(u) = c(\omega^-(A)).$$

Însă am văzut că pentru orice flux f și orice tăietură $\omega^-(A)$ există inegalitatea $f_b \leqslant c(\omega^-(A))$. Deoarece pentru fluxul și tăietura găsite această inegalitate este chiar egalitate, rezultă că fluxul f_b este maxim, iar tăietura $\omega^-(A)$ are o capacitate minimă.

Am găsit în același timp o nouă demonstrație a teoremei lui Ford-Fulkerson din problema precedentă, în cazul cînd capacitățile arcelor sînt numere întregi.

Să observăm că acest algoritm permite găsirea fluxului maxim după un număr finit de pași în orice rețea de transport G pentru care capacitățile arcelor sînt numere raționale.

Dacă arcele rețelei sînt $u_1, \ldots, u_m$ și $c(u_i) = \frac{p_i}{q_i}$ cu p_i, q_i numere întregi nenegative și $q_i \geqslant 1$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, vom înmulți capacitățile tuturor arcelor cu cel mai mic multiplu comun $[q_1, \ldots, q_m]$ al numitorilor acestor fracții.

Obținem o rețea de transport G_1 avînd același graf și capacitățile tuturor arcelor numere întregi. Dacă f este un flux în rețeaua G_1, atunci dacă definim fluxul g prin:

$$g(u) = \frac{f(u)}{[q_1, \ldots, q_m]} \qquad (1)$$

pentru fiecare arc $u \in U$, condițiile de conservare în fiecare vîrf $x \neq a, b$ și de mărginire pe fiecare arc vor fi verificate pentru rețeaua G.

Într-adevăr, din $\sum_{u \in \omega^-(x)} f(u) = \sum_{u \in \omega^+(x)} f(u)$ se deduce $\sum_{u \in \omega^-(x)} g(u) = \sum_{u \in \omega^+(x)} g(u)$ și $0 \leqslant f(u) \leqslant [q_1, \ldots, q_m]\, c(u)$ implică $0 \leqslant g(u) \leqslant c(u)$ pentru orice arc $u \in U$.

În plus, dacă f_b este maxim, atunci $g_b = \frac{f_b}{[q_1, \ldots, q_m]}$ este maxim în rețeaua de transport G.

Presupunînd contrariul, există un flux h în rețeaua G astfel încît $h_b > g_b$. Definind fluxul cu componente egale cu $[q_1, \ldots, q_m]\, h(u)$ pentru fiecare arc $u \in U$ al rețelei G_1, obținem un flux cu valoarea la ieșire egală cu $[q_1, \ldots, q_m]\, h_b > [q_1, \ldots, q_m]\, g_b = f_b$, ceea ce contrazice maximalitatea fluxului f.

Deci fluxul g definit prin (1) este maxim în rețeaua G dacă și numai dacă fluxul f este maxim în rețeaua G_1, fluxul f maxim putînd fi determinat cu

algoritmul prezentat, într-un număr finit de pași, deoarece rețeaua G_1 are toate capacitățile arcelor numere întregi.

Problema următoare ne arată că algoritmul lui Ford-Fulkerson poate să nu aibă nu număr finit de pași, dacă capacitățile arcelor sînt numere iraționale.

9.21. Dacă $v = [a, \ldots, b]$ este un lanț în rețeaua de transport de la intrare la ieșire și arcul $u \in v^+$, vom numi rezervă de flux pe acest arc cantitatea $c(u) - f(u)$ cu care poate fi mărit fluxul, fără a depăși capacitatea arcului respectiv.

Vom demonstra prin inducție că există o ordine de determinare a unor lanțuri de la a la b pe care putem mări fluxul conform algoritmului din problema precedentă, astfel încît la pasul n fluxul f_b să crească cu a_n. Plecăm cu un flux avînd componente nule pe fiecare arc.

Pasul 0). Considerăm lanțul $[a, x_1, y_1, b]$.

Găsim $\varepsilon_0 = \min(c, a_0, c) = a_0$ și vom defini noul flux pe arcele (a, x_1), (x_1, y_1), (y_1, b) egal cu $a_0 < c$, pe celelalte arce fluxul avînd componente nule.

Se face $n = 1$. Fie A_1', A_2', A_3', A_4' o permutare a arcelor A_1, A_2, A_3, A_4 astfel încît A_1' să aibă rezerva de flux 0, A_2' rezerva a_n, A_3' rezerva a_{n+1} și A_4' rezerva a_{n+1}.

Pentru $n = 1$ se observă că putem lua $A_i' = A_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Pasul n). Alegem un lanț de la a la b care include dintre arcele A_i' numai pe A_2' și A_3', de exemplu: $[a, x_2', y_2', x_3', y_3', b]$. Găsim $\varepsilon_1 = \min(c - f(a, x_2'), a_n, c - f(y_2', x_3'), a_{n+1}, c - f(y_3', b))$. Conform ipotezei de inducție, cantitatea de flux trimisă pînă în prezent în b pe arcele rețelei este $\sum_{i=1}^{n-1} a_i$, deci $f(a, x_2') \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, ceea ce implică: $c - f(a, x_2') \geqslant \sum_{i=n}^{\infty} a_i > a_n > a_{n+1}$. La fel se deduce că $c - f(y_2', x_3') > a_n$ și $c - f(y_3', b) > a_n$, deci $\varepsilon_1 = a_{n+1}$. Vom mări cu a_{n+1} fluxul pe arcele (a, x_2'), (x_2', y_2'), (y_2', x_3'), (x_3', y_3') și (y_3', b), deci fluxul în b crește cu a_{n+1}. Arcele A_1', A_2', A_3', A_4' au acum rezervele de flux egale cu 0, $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$, 0, respectiv a_{n+1}.

Alegem acum un lanț v de la a la b pe care putem mări fluxul în b, astfel încît $A_2' \in v^+$ și $v^- = \{A_1', A_3'\}$. De exemplu:

$$v = [a, x_2', y_2', y_1', x_1', y_3', x_3', y_4', b]$$

cu $\varepsilon_2 = \min(c - f(a, x_2'), a_{n+2}, c - f(y_2', y_1'), c(A_1'), c - f(x_1', y_3'), c(A_3'), c - f(x_3', y_4'), c - f(y_4', b))$. Arcele A_1' și A_3' avînd rezervele de flux egale cu 0, pe aceste arce fluxul este egal cu capacitatea arcului.

Obținem ca mai înainte $c - f(a, x_2') \geqslant \sum_{i=n+2}^{\infty} a_i + a_n > a_{n+2}$, deoarece cantitatea de flux trimisă pînă în prezent în b este $\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_{n+1}$.

Toate celelalte diferențe care apar în expresia lui ε_2 sînt din aceleași motive mai mari ca a_{n+2}. De asemenea, $\min(c(A_1'), c(A_3')) \geqslant a_2 > a_{n+2}$ pentru $n \geqslant 1$.

Rezultă că $\varepsilon_2 = a_{n+2}$ și vom mări cu a_{n+2} fluxul pe arcele (a, x_2'), (x_2', y_2'), (y_2', y_1'), (x_1', y_3'), (x_3', y_4') și (y_4', b) și îl vom micșora cu a_{n+2} pe arcele A_1' și A_3'. Prin aceasta fluxul în b crește cu încă a_{n+2}.

Rezervele de flux ale arcelor A_1', A_2', A_3', A_4' sînt acum egale respectiv cu a_{n+2}, 0, a_{n+2}, a_{n+1}, iar fluxul f_b a crescut ca urmare a aplicării pasului n cu $a_{n+1} + a_{n+2} = a_n$, deci a ajuns la valoarea:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Să observăm că avem o situație analoagă cu cea existentă înaintea aplicării pasului n. Rezervele de flux ale arcelor A_i' ne conduc la permutarea următoare a arcelor A_i':

$$\begin{pmatrix} A_1' A_2' A_3' A_4' \\ A_2' A_4' A_1' A_3' \end{pmatrix}$$

Deci redefinim $A_1' \leftarrow A_2'$, $A_2' \leftarrow A_4'$, $A_3' \leftarrow A_1'$, $A_4' \leftarrow A_3'$; $n \leftarrow n + 1$ și ne întoarcem la pasul n).

Se observă deci că aplicarea algoritmului din problema precedentă nu are un sfîrșit, iar după n pași obținem

$$f_b = \sum_{i=1}^{n} a_i < c.$$

Însă $\max f' = 4c$, flux maxim care poate fi obținut astfel: $f(a, x_1) = f(x_1, y_2) = f(y_2, b) = f(a, x_2) = f(x_2, y_1) = f(y_1, b) = f(a, x_3) = f(x_3, y_4) = f(y_4, b) = f(a, x_4) = f(x_4, y_3) = f(y_3, b) = c$, pe celelalte arce fluxul fiind nul.

(L.R. Ford, D.R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton Univ. Press, 1962.)

9.22. Pentru un graf bipartit $G = (A, B, U)$ unde U este mulțimea muchiilor, orice muchie avînd una dintre extremități în A iar cealaltă în B, vom construi o rețea de transport în modul următor:

Vom considera două noi vîrfuri, intrarea a și ieșirea b și toate arcele (a, x) cu $x \in A$ cărora le asociem o capacitate egală cu 1 și toate arcele (y, b) unde $y \in B$ cu capacitatea egală cu 1. În plus pentru fiecare muchie $[x, y]$ cu $x \in A$ și $y \in B$ vom considera arcul (x, y) în rețeaua de transport asociată.

Toate arcele de forma (x, y) cu $x \in A$ și $y \in B$ au o capacitate egală cu C unde $C = |A| + 1$.

Astfel, grafului bipartit din figura 9.2 îi corespunde rețeaua de transport din figura 9.3, pentru care $C = 5$. Din modul de definiție a acestei rețele de transport rezultă că orice flux cu componente întregi nu poate avea decît

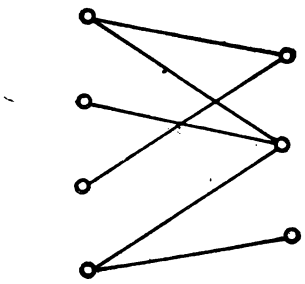


Fig. 9.2

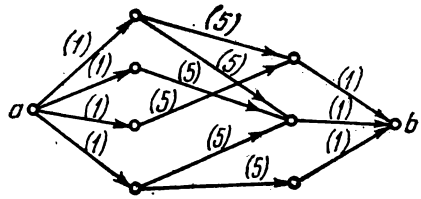


Fig. 9.3

valorile 0 sau 1 pe arcele rețelei, iar mulțimea arcelor de forma (x, y) cu $x \in A$ și $y \in B$ care au un flux egal cu 1 determină un cuplaj format din muchiile corespunzătoare $[x, y]$ ale grafului G. Într-adevăr, aceste arce cu fluxul egal cu unitatea nu pot avea o extremitate comună, deoarece atît arcele de intrare, cît și arcele de ieșire ale rețelei au o capacitate egală cu 1, deci pot avea un flux maxim egal cu unitatea. Numărul arcelor $u = (x, y)$ care au un flux $f(u) = 1$, deci numărul muchiilor din cuplajul asociat, este egal cu fluxul la ieșire f_b.

Deci un flux maxim f_b în rețeaua de transport asociată corespunde, considerînd arcele dintre A și B care au un flux egal cu 1, unui cuplaj maxim al grafului bipartit G.

Rezultă că $\nu(G) = \max f_b$. Conform teoremei lui Ford-Fulkerson, $\max f_b = \min_T c(\omega^-(T))$, unde T este o mulțime de vîrfuri astfel încît $a \notin T$ și $b \in T$. Deoarece pentru $T = A \cup B \cup \{b\}$ obținem $c(\omega^-(T)) = |A|$ iar $C = |A| + 1$, rezultă că minimul capacității unei tăieturi în rețeaua de transport se atinge pentru o tăietură care nu conține nici un arc de forma (x, y) cu $x \in A$ și $y \in B$.

Deci $\min_T c(\omega^-(T)) = c(\omega^-(T_0))$, unde

$$\omega^-(T_0) = \{(a, x) \mid x \in A_0\} \cup \{(y, b) \mid y \in B_0\}, \text{ iar } A_0 \subset A \text{ și } B_0 \subset B.$$

Să arătăm că $A_0 \cup B_0$ este un suport al grafului bipartit G. Pentru aceasta vom considera o muchie oarecare $[x, y] \in U$, căreia îi corespunde drumul (a, x, y, b) în rețeaua de transport asociată lui G. Deoarece orice drum de la a la b conține cel puțin un arc al unei tăieturi a rețelei, rezultă că sau $(a, x) \in \omega^-(T_0)$, deci $x \in A_0$ sau $(y, b) \in \omega^-(T_0)$, deci $y \in B_0$. Am obținut că $A_0 \cup B_0$ este un suport al lui G de cardinal $|A_0 \cup B_0| = |A_0| + |B_0| = |\omega^-(T_0)| = c(\omega^-(T_0)) = \nu(G)$, deoarece fiecare arc din $\omega^-(T_0)$ are o capacitate egală cu 1.

Deci $\tau(G) \leqslant |A_0 \cup B_0| = \nu(G)$.

Pe de altă parte, dacă V este o mulțime de muchii care formează un cuplaj și S este o mulțime de vîrfuri care formează un suport al lui G, deoarece muchiile din V nu au două cîte două extremități comune, iar fiecare conține cel puțin un vîrf din S, rezultă $|V| \leqslant |S|$. Aceasta implică $\nu(G) \leqslant \tau(G)$, care împreună cu inegalitatea de sens contrar dedusă anterior ne demonstrează egalitatea dintre aceste două numere pentru grafurile bipartite.

9.23. Matricea A poate fi considerată matricea unui graf bipartit $G = (X, Y, U)$, unde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ iar $U = \{(x_i, y_j) \mid |a_{ij} = 1\}$.

Numărul maxim de elemente egale cu 1 care se găsesc în linii și coloane diferite corespunde muchiilor unui cuplaj maxim al lui G, care conține $\nu(G)$ muchii. Dacă liniile $i_1, \ldots, i_r$ și coloanele $j_1, \ldots, j_s$ conțin împreună toate elementele egale cu 1 ale matricei A, rezultă că $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_s}\}$ este un suport al grafului G.

Numărul minim de linii și coloane cu această proprietate este deci egal cu $\tau(G)$. Conform problemei precedente $\nu(G) = \tau(G)$, ceea ce încheie demonstrația.

10.1. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul de vîrfuri ale grafului G.

Dacă graful G are cel mult $k+1$ vîrfuri, atunci evident $\chi(G) \leqslant k+1$. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult n vîrfuri și fie G un graf cu $n+1$ vîrfuri, cu gradele vîrfurilor majorate de k și x un vîrf al lui G. Deoarece orice vîrf al grafului G_x obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x are gradul cel mult egal cu k, rezultă:

$$\chi(G_x) \leqslant k+1,$$

folosind ipoteza de inducție. Deoarece x este adiacent cu cel mult k vîrfuri din G_x, putem colora vîrful x cu o culoare care nu apare printre culorile vîrfurilor adiacente cu x, astfel încît numărul total de culori utilizate pentru a colora vîrfurile lui G să nu depășească $k+1$. Deci $\chi(G) \leqslant k+1$.

10.2. Vom arăta mai întîi că $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \leqslant n+1$ prin inducție după n. Pentru $n=1$ și $n=2$ avem chiar egalitate. Presupunînd că inegalitatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult $n-1$ vîrfuri, fie G un graf cu n vîrfuri, x un vîrf al lui G și G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x. Este clar că

$$\chi(G) \leqslant \chi(G_x)+1, \quad \chi(\bar{G}) \leqslant \chi(\bar{G}_x)+1.$$

Dacă cel puțin una dintre inegalități este strictă, obținem inegalitatea căutată, deoarece conform ipotezei de inducție avem $\chi(G_x)+\chi(\bar{G}_x) \leqslant n$. Dacă însă $\chi(G)=\chi(G_x)+1$ și $\chi(\bar{G})=\chi(\bar{G}_x)+1$, rezultă că vîrful x este adiacent cu cel puțin cîte un vîrf colorat cu fiecare dintre cele $\chi(G_x)$ culori ale lui G_x, deci $d_G(x) \geqslant \chi(G_x)$ și analog $d_{\bar{G}}(x) \geqslant \chi(\bar{G}_x)$. Obținem $\chi(G_x)+\chi(\bar{G}_x) \leqslant d_G(x)+d_{\bar{G}}(x)=n-1$, deci $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \leqslant n+1$.

Notînd cu $\alpha(G)$ numărul maxim de vîrfuri ale lui G care induc un subgraf format din vîrfuri izolate, obținem $\chi(G)\alpha(G) \geqslant n$, deoarece fiecare clasă a unei colorări cu $\chi(G)$ culori induce un subgraf format din vîrfuri neadiacente două cîte două.

Pe de altă parte mai găsim $\chi(\bar{G}) \geqslant \alpha(G)$, deoarece fiecare vîrf al unei mulțimi M de vîrfuri neadiacente două cîte două în G, trebuie să primească cîte o culoare diferită de a celorlalte vîrfuri din M, pentru orice colorare a vîrfurilor lui $\bar{G}$. Deci $\chi(G)\,\chi(\bar{G}) \geqslant n$. Celelalte două inegalități se deduc acum imediat din inegalitatea: $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, pentru $a, b \in \mathbf{R}$.
(E.A. Nordhaus, J.W. Gaddum, The American Math. Monthly, 63 (1956), 176—177.)

10.3. Să considerăm o reprezentare planară a grafului G. Vom demonstra că fețele din interiorul ciclului hamiltonian C pot fi colorate cu 2 culori, astfel încît oricare două fețe care au muchii comune să aibă culori diferite.

Pentru aceasta, vom construi graful dual G_1^* al fețelor care se găsesc în interiorul ciclului C, definit astfel: fiecare față se reprezintă printr-un nou vîrf situat în interiorul acelei fețe, două vîrfuri fiind adiacente dacă fețele corespunzătoare au cel puțin o muchie comună.

Trebuie deci să arătăm că vîrfurile lui G_1^* pot fi colorate cu două culori, astfel încît oricare două vîrfuri adiacente să aibă culori diferite.

Graful G_1^* nu conține cicluri. În caz contrar, un ciclu elementar al lui G_1^* ar conține în interior un vîrf x al grafului G. Dar x se găsește pe ciclul hamiltonian C, ale cărui muchii incidente cu x au fost reprezentate în figura 10.1 prin linii îngroșate. Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece vîrfurile lui G_1^*, deci fețele considerate ale lui G nu se găsesc toate în interiorul ciclului C. Deoarece G_1^* nu conține cicluri, rezultă că nu conține nici cicluri elementare, deci este un graf bipartit conform problemei 8.5.

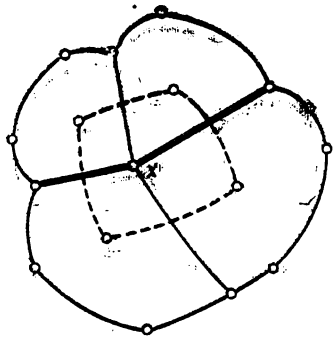


Fig. 10.1

Colorînd vîrfurile din fiecare parte A și B a lui G_1^* cu o aceeași culoare, obținem o colorare a vîrfurilor cu 2 culori și toate muchiile lui G_1^* fiind de forma $[a, b]$ cu $a \in A$ și $b \in B$, rezultă că oricare două vîrfuri adiacente au culori diferite.

În mod asemănător, considerînd graful dual G_2^* al fețelor din exteriorul lui C, obținem că putem colora cu încă 2 culori fețele situate înafara ciclului hamiltonian C. Am găsit astfel o colorare cu 4 culori a fețelor dintr-o reprezentare planară a grafului G, care are proprietatea cerută.

10.4. Notăm coordonatele punctelor de intersecție într-un sistem ortogonal de axe în plan cu $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Putem presupune că direcțiile axelor sînt astfel alese încît abscisele $x_1, \ldots, x_n$ să fie diferite două cîte două, de exemplu $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Vom colora vîrfurile grafului în această ordine cu 3 culori. Dacă am colorat cu 3 culori vîrfurile de abscise $x_1, \ldots, x_{i-1}$, vîrful (x_i, y_i) are cel mult două vîrfuri adiacente care au fost deja colorate, deoarece nu există trei drepte concurente. Deci pentru vîrful (x_i, y_i) găsim o a treia culoare disponibilă, pentru $i = 2, \ldots, n$, ceea ce verifică inegalitatea cerută.

10.5. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul f al fețelor grafului G. Dacă $f = 1$ obținem că G este conex și nu conține cicluri, deci este un arbore, pentru care singura față este fața infinită. În acest caz formula se verifică, deoarece $m = n - 1$. Să presupunem că $f > 1$ și proprietatea este adevărată pentru toate grafurile planare conexe cu cel mult $f - 1$ fețe.

Fie $[a, b]$ o muchie a unui ciclu al lui G. Muchia $[a, b]$ se găsește pe frontiera a două fețe S și T. Suprimînd muchia $[a, b]$ se obține un nou graf planar conex G_1 cu n_1 vîrfuri, m_1 muchii și f_1 fețe, pentru care fețele S și T s-au unit pentru a forma o nouă față, în timp ce celelalte fețe ale lui G au rămas neschimbate. Deci $n_1 = n$, $m_1 = m - 1$ și $f_1 = f - 1$. Conform ipotezei de inducție există relația $f_1 = m_1 - n_1 + 2$, deci obținem $f = f_1 + 1 = m_1 - n_1 + 3 = m - n + 2$.

10.6. G fiind un graf planar cu m muchii, vor exista $m_1 \leqslant m$ muchii care se găsesc pe frontiera a exact două fețe. Dacă G nu are vîrfuri de gradul 1 obținem $m_1 = m$. Să decupăm toate fețele grafului și să numărăm în două moduri cele $2m_1$ muchii care se găsesc pe frontierele tuturor fețelor. Deoarece fiecare față are cel puțin 3 muchii pe frontieră, obținem

$$2m \geqslant 2m_1 \geqslant 3f = 3(m - n + 2)$$

sau

$$m \leqslant 3n - 6,$$

folosind formula lui Euler.

Dacă G nu conține triunghiuri, obținem în mod analog:

$$2m \geqslant 2m_1 \geqslant 4f \quad 4(m - n + 2)$$

sau

$$m \leqslant 2n - 4.$$

10.7. Presupunînd că graful complet cu 5 vîrfuri ar fi planar, am avea:

$$f = m - n + 2 = 10 - 5 + 2 = 7.$$

Conform rezolvării problemei precedente, avem:

$$20 = 2m \geqslant 3f = 21,$$

ceea ce este absurd. Presupunînd că graful multipartit complet $K_{3,3}$ ar fi planar, am avea: $f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$.

În reprezentarea planară a grafului $K_{3,3}$ nu putem avea nici o față triunghiulară, deoarece grafurile bipartite nu conțin cicluri impare (problema 8.5). Deci fiecare față are frontiera formată din cel puțin 4 muchii. Obținem în mod analog:

$$18 = 2m \geqslant 4f = 20,$$

ceea ce este absurd.
Deci K_5 și $K_{3,3}$ nu sînt planare.

10.8. Dacă graful G nu este o triangulație a planului (orice față este un ciclu cu 3 vîrfuri), vom adăuga muchii astfel încît fiecare față să aibă exact trei muchii. Dacă vom demonstra că graful obținut conține un vîrf x cu gradul $d(x) \leqslant 5$, va rezulta că și graful G conține un vîrf de grad cel mult 5, deoarece prin adăugarea de muchii gradele vîrfurilor cresc.

Să presupunem deci că G este o triangulație.

Conform formulei lui Euler (problema 10.5) putem scrie:

$$v + f - m = 2, \tag{1}$$

unde v este numărul de vîrfuri, f este numărul de fețe (inclusiv fața infinită) și m este numărul de muchii ale grafului G.

Deoarece fiecare față are 3 muchii și fiecare muchie aparține la 2 fețe, putem scrie:

$$3f = 2m. \tag{2}$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că orice vîrf x are gradul $d(x) \geqslant 6$.

Deoarece pentru orice graf are loc relația:

$$\Sigma d(x) = 2m,$$

fiecare muchie $[x, y]$ fiind numărată de 2 ori, și în $d(x)$ și în $d(y)$, putem scrie:

$$2m \geqslant 6v,$$

de unde $\frac{m}{3} \geqslant v$.

Ținînd seama de (2), formula lui Euler ne conduce la:

$$2 = v + f - m = v + \frac{2m}{3} - m = v - \frac{m}{3} \leqslant 0,$$

ceea ce este absurd.

Rezultă că orice graf planar G conține cel puțin un vîrf x care verifică $d(x) \leqslant 5$.

Această majorare a gradului minim pentru un graf planar nu mai poate fi îmbunătățită, așa cum se vede din figura 10.2, unde este reprezentat un graf planar cu 12 vîrfuri, regulat de grad 5 (graful icosaedrului).

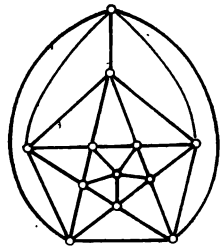


Fig. 10.2

10.9. Este suficient să presupunem că G este conex, deoarece în caz contrar putem adăuga muchii între vîrfuri situate în componente conexe diferite dintr-o reprezentare planară a lui G, obținînd un nou graf planar G_1 astfel încît G_1 să fie conex și $g(G_1) = g$.

În plus, numărul de muchii ale lui G_1 majorează numărul de muchii ale lui G.

Fie deci G un graf planar conex cu n vîrfuri, m muchii și $g(G) = g$. Vom demonstra proprietatea cerută prin inducție după numărul vîrfurilor. Dacă $n = g$ atunci G este un ciclu cu n vîrfuri, deci $m = n$ și inegalitatea devine egalitate. Să presupunem că inegalitatea are loc pentru toate grafurile planare cu cel mult $n - 1$ vîrfuri și fie G un graf planar cu n vîrfuri și $g(G) = g$.

Dacă G conține o muchie $[a, b]$ a cărei suprimare disconectează graful G, să notăm cu H graful parțial obținut din G prin suprimarea muchiei $[a, b]$. H se compune din două grafuri planare disjuncte G_1 și G_2 care au n_1 vîrfuri și m_1 muchii, respectiv n_2 vîrfuri și m_2 muchii. Cel puțin unul dintre grafurile G_1 și G_2 are grosimea egală cu g, de exemplu $g(G_1) = g_1 = g$ și celălalt graf G_2 este un arbore sau are o grosime $g(G_2) = g_2 \geqslant g$.

Această proprietate rezultă din aceea că muchia $[a, b]$ neaparținînd nici unui ciclu în graful G, deducem că $g(H) = g(G)$. Dacă graful G_2 este un arbore obținem:

$$m_2 = n_2 - 1 < \frac{g}{g-2}(n_2 - 2).$$

În caz contrar, utilizînd ipoteza de inducție, deducem:

$$m_2 \leqslant \frac{g_2}{g_2 - 2}(n_2 - 2) \leqslant \frac{g}{g-2}(n_2 - 2)$$

și de asemenea $m_1 \leqslant \frac{g}{g-2}(n_1 - 2)$. Putem scrie:

$$m = m_1 + m_2 + 1 \leqslant \frac{g}{g-2}(n_1 + n_2 - 4) + 1 < \frac{g}{g-2}(n_1 + n_2 - 4) +$$

$$+ \frac{2g}{g-2} = \frac{g}{g-2}(n - 2),$$

deoarece $n_1 + n_2 = n$.

Deci dacă G conține o muchie $[a, b]$ a cărei suprimare face ca G să devină neconex, inegalitatea este demonstrată și am văzut că avem chiar inegalitate strictă.

Rămîne să studiem cazul cînd G nu conține nici o muchie $[a, b]$ a cărei suprimare transformă graful G într-un graf neconex.

Să notăm cu f_i numărul de fețe care conțin i muchii pentru $i \geqslant g$ și cu f numărul total de fețe dintr-o reprezentare planară a lui G.
Putem scrie:

$$\sum_{i \geqslant g} f_i = f \text{ și } \sum_{i \geqslant g} i f_i = 2m,$$

deoarece în acest caz fiecare muchie $[a, b]$ se găsește pe frontiera dintre două fețe.
Deci obținem:

$$2m = \sum_{i \geqslant g} if_i \geqslant \sum_{i} gf_i = gf.$$

Aplicînd formula lui Euler (problema 10.5) deducem:

$$m + 2 = n + f \leqslant n + \frac{2}{g} m, \text{ de unde:}$$

$$m \leqslant \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Se observă că egalitatea are loc numai pentru $f_{g+1} = f_{g+2} = \ldots = 0$, deci cînd toate fețele lui G sînt cicluri cu g vîrfuri. Acest caz se poate realiza pentru anumite valori ale lui n, de exemplu pentru $n = g$.

10.10. Vom demonstra această proprietate prin inducție după numărul de vîrfuri ale grafului G.

Dacă G are cel mult 5 vîrfuri, proprietatea este imediată.

Să presupunem că orice graf planar cu cel mult n vîrfuri are numărul cromatic mai mic sau egal cu 5 și fie G un graf planar cu $n + 1$ vîrfuri.

Conform problemei 10.8, există un vîrf x al lui G cu gradul $d(x) \leqslant 5$.

Să notăm cu G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x. Conform ipotezei de inducție, vîrfurile lui G_x pot fi colorate cu cel mult 5 culori, astfel încît oricare două vîrfuri adiacente să aibă culori diferite.

Dacă $d(x) \leqslant 4$ vom găsi pentru vîrful x o culoare disponibilă, diferită de culorile vîrfurilor adiacente cu x, deci vîrfurile lui G pot fi colorate cu cel mult 5 culori sau $\chi(G) \leqslant 5$.

Dacă $d(x) = 5$ și vîrfurile adiacente cu x, notate y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, sînt colorate cu cel mult 4 culori în colorarea cu cel mult 5 culori a lui G_x, găsim o culoare disponibilă pentru x și proprietatea este demonstrată. Singurul caz rămas este acela cînd $d(x) = 5$ și vîrfurile $y_1, \ldots, y_5$ sînt colorate cu exact 5 culori, fie A, B, C, D, E în colorarea lui G_x (fig. 10.3). Să considerăm componenta conexă M a subgrafului lui G_x format din vîrfurile colorate cu culorile A sau C care conține vîrful y_1. Dacă vîrful y_3 nu aparține acestei componente, putem schimba în M culorile A și C între ele, rezultînd o colorare cu 5 culori a grafului G_x în care y_1 are culoarea C.

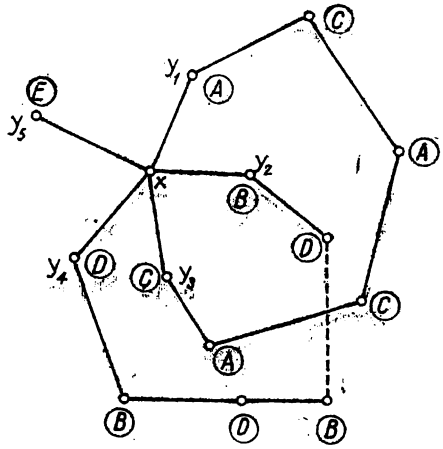


Fig. 10.3

Deci culoarea A a devenit disponibilă și vîrful x poate fi colorat cu culoarea A, rezultînd o colorare cu 5 culori a vîrfurilor grafului G. În caz contrar, dacă y_1 și y_3 aparțin lui M, rezultă că există un lanț care unește pe y_1 cu y_3, format din vîrfuri colorate alternativ cu culorile A și C.

Considerînd componenta conexă N a subgrafului lui G_x format din vîr-

furile colorate cu culorile B sau D care conține vîrful y_2, obținem că $y_4 \notin N$. Într-adevăr, în caz contrar ar exista un lanț de extremități y_2 și y_4, ale cărui vîrfuri ar fi colorate alternativ cu culorile B și D. Deoarece graful este planar rezultă că acest lanț trebuie să aibă un vîrf comun cu lanțul care unește pe y_1 și y_3 (vezi fig. 10.3). Dar aceasta nu este posibil, deoarece cele două lanțuri sînt formate din mulțimi de vîrfuri pentru care mulțimile de culori sînt disjuncte. Deci $y_4 \notin N$ și schimbînd în componenta N culorile B și D între ele obținem o colorare a subgrafului G_x cu 5 culori, pentru care vîrful y_2 are culoarea D. Deci culoarea B a devenit disponibilă, putînd colora cu B vîrful x, ceea ce produce o colorare cu 5 culori a vîrfurilor grafului G.

În anul 1976 K. Appel și W. Haken au reușit să demonstreze teorema celor 4 culori, care afirmă că pentru orice graf planar G există inegalitatea $\chi(G) \leqslant 4$, folosind un calculator electronic pentru studiul a peste 1900 configurații care interveneau în demonstrație.

10.11. Grafurile care nu conțin triunghiuri, au numerele cromatice $\chi(G_1) = 3$, respectiv $\chi(G_2) = 4$ și conțin un număr minim de vîrfuri sînt desenate în figurile 10.4 și 10.5.

În general, dacă graful G are vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$, nu conține triunghiuri și are $\chi(G) = k$, vom asocia un nou vîrf y_i cu fiecare vîrf x_i al lui G pentru $i = 1, \ldots, n$. Vom lega prin muchii vîrful y_i cu toate vîrfurile adiacente cu x_i pentru $i = 1, \ldots, n$ și vom mai adăuga un nou vîrf z pe care îl legăm prin muchii cu toate vîrfurile $y_1, \ldots, y_n$. Vom arăta că graful G_1 astfel obținut nu conține triunghiuri și $\chi(G_1) = k + 1$. Deoarece G nu conține triunghiuri și vîrfurile $y_1, \ldots, y_n$ nu sînt adiacente două cîte două, rezultă că orice triunghi al lui G_1 trebuie să aibă cele 3 vîrfuri de forma x_i, x_j, y_k. Am ajuns la o contradicție, deoarece x_i și x_j sînt vîrfuri vecine cu x_k, deci G conține triunghiul x_i, x_j, x_k, ceea ce contrazice ipoteza.

Să mai arătăm că $\chi(G_1) = k + 1$. Oricum am colora vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$ cu k culori astfel încît oricare două vîrfuri unite printr-o muchie să aibă culori diferite, vîrfurile $y_1, \ldots, y_n$ pot fi colorate cu k culori colorînd vîrful y_i cu aceeași culoare cu vîrful x_i pentru $i = 1, \ldots, n$. Acesta este numărul minim de culori cu care pot fi colorate vîrfurile $y_1, \ldots, y_n$, deoarece dacă sînt suficiente $p < k$ culori pentru a colora vîrfurile $y_1, \ldots, y_n$, rezultă că $\chi(G) < k$, colorînd vîrful x_i cu culoarea vîrfului y_i pentru $i = 1, \ldots, n$.

Vîrful z fiind adiacent cu toate vîrfurile y_i, rezultă că $\chi(G_1) = k + 1$.

Prin această construcție plecînd de la ciclul cu 5 vîrfuri C_5 din figura 10.4 găsim graful din figura 10.5, de număr cromatic egal cu 4 și fără triunghiuri. Repetînd această construcție găsim că există grafuri G cu $\chi(G) = k$ și care nu conțin triunghiuri, pentru orice număr natural $k \geqslant 3$.

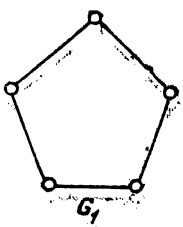


Fig. 10.4

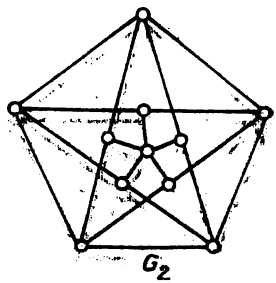


Fig. 10.5

10.12. Să presupunem prin reducere la absurd că G conține trei vîrfuri adiacente două cîte două (a_1, b_1), (a_2, b_2) și (a_3, b_3), astfel încît $a_2 = a_1 + b_1$, $a_3 = a_1 + b_1$ și $a_3 = a_2 + b_2$. Deci $a_3 = a_1 + b_1 + b_2 > a_1 + b_1$, ceea ce este contradictoriu.

Fie două drepte $x = c_1$ și $x = c_2$ cu $c_2 > c_1$. Rezultă că punctul $(c_1, c_2 - c_1)$ al dreptei de ecuație $x = c_1$ este adiacent cu toate punctele de coordonate întregi și pozitive ale dreptei de ecuație $x = c_2$. Deci mulțimea culorilor vîrfurilor lui G situate pe dreapta $x = c_1$ este diferită de mulțimea culorilor vîrfurilor lui G situate pe dreapta $x = c_2$. Să presupunem că numărul cromatic $\chi(G) = m < \infty$. Rezultă că numărul dreptelor de ecuație $x = c$, $c > 0$ și $c \in \mathbf{Z}$ este cel mult egal cu numărul submulțimilor nevide ale mulțimii culorilor, adică cu $2^m - 1$, ceea ce este absurd. Deci $\chi(G) = \infty$.
(A. Gyárfás, Discrete Math., 2, 30 (1980), 185.)

10.13. Putem presupune că toate fețele lui G dintr-o reprezentare planară sînt triunghiuri, adică G este o triangulație a planului. Într-adevăr, dacă G nu este triangulație vom adăuga noi muchii grafului G pînă cînd obținem o triangulație G_1. Dacă pentru G_1 inegalitatea cerută este verificată, ea va fi cu atît mai mult adevărată pentru G, deoarece gradele vîrfurilor lui G_1 majorează gradele vîrfurilor grafului G. Deci fie G un graf planar cu toate fețele triunghiuri pentru care suma pătratelor gradelor este maximă. Dacă notăm cu x un vîrf de grad minim, vom arăta că $d(x) = 3$.

Într-adevăr, dacă $d(x) \leqslant 2$ rezultă $d(x) = 2$ și graful G se reduce la K_3, ceea ce contrazice ipoteza $n \geqslant 4$. Să presupunem că $d(x) \geqslant 4$ și fie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ vîrfurile adiacente cu x astfel încît $d(x_1) \leqslant d(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, r$, unde $r = d(x) \geqslant 4$ (fig. 10.6).

Vom suprima muchia $[x, x_1]$ și vom adăuga muchia $[x_2, x_r]$, ceea ce produce un nou graf planar G_1 fără muchii multiple pentru $r \geqslant 4$.

Dacă notăm cu S suma pătratelor gradelor pentru graful G și cu S_1 suma pătratelor gradelor pentru graful G_1, obținem:

$$S_1 - S = (d(x_r) + 1)^2 + (d(x_2) + 1)^2 + (d(x) - 1)^2 + (d(x_1) - 1)^2 - (d(x_r))^2 - (d(x_2))^2 - (d(x))^2 - (d(x_1))^2 = 2d(x_r) + 2d(x_2) - 2d(x) - 2d(x_1) + 4 > 0,$$

deoarece $d(x) \leqslant d(x_1) \leqslant d(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, r$.

Această inegalitate contrazice însă maximalitatea grafului G, deci orice graf G pentru care S este maximă conține un vîrf x de grad $d(x) = 3$.

Vom demonstra acum proprietatea prin inducție după n. Pentru $n = 4$, considerînd o reprezentare planară a grafului K_4 obținem în ambii membri 36, deci egalitate. Orice alt graf G cu 4 vîrfuri are o sumă a pătratelor gradelor mai mică decît 36, deoarece gradele unor vîrfuri descresc strict și proprietatea este demonstrată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile planare cu cel mult n vîrfuri și fie G un graf planar cu $n + 1$ vîrfuri pentru care suma pătratelor gradelor este maximă și care are toate fețele triunghiulare. Conform observației anterioare, există un vîrf x cu gradul $d(x) = 3$. Fie a, b, c vîrfurile adiacente cu x. Să notăm cu G_1 subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a celor 3 muchii incidente cu x.

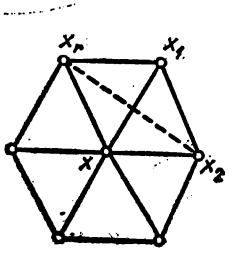


Fig. 10.6

Cu aceleași notații ca mai înainte, obținem:

$$S = S_1 + 9 + (d(a) + 1)^2 + (d(b) + 1)^2 + (d(c) + 1)^2 - (d(a))^2 - (d(b))^2 - (d(c))^2 = S_1 + 2(d(a) + d(b) + d(c)) + 12.$$

Vom arăta că pentru oricare trei vîrfuri a, b, c care induc un subgraf complet cu 3 vîrfuri într-un graf planar cu n vîrfuri, există inegalitatea:

$$d(a) + d(b) + d(c) \leqslant 2n + 1. \tag{1}$$

Într-adevăr, dacă un alt vîrf d este adiacent cu toate cele trei vîrfuri a, b, c, atunci un alt vîrf e poate fi adiacent cu cel mult două dintre vîrfurile a, b sau c, de exemplu cu a și cu b, din cauza condiției de planaritate a grafului G (fig. 10.7) (conform problemei 10.7).

Deci numărul muchiilor care unesc vîrfurile a, b, c cu celelalte $n-3$ vîrfuri ale grafului G este majorat de $2(n-3)+1 = 2n-5$. Ținînd seama și de contribuția muchiilor $[a, b]$, $[b, c]$ și $[a, c]$ la gradele $d(a)$, $d(b)$, $d(c)$, obținem: $d(a) + d(b) + d(c) \leqslant 2n + 5 + 6 = 2n + 1$ și (1) este justificată.

Conform ipotezei de inducție, $S_1 \leqslant 2(n+3)^2 - 62$, deci $S \leqslant 2(n+3)^2 - 62 + 2(2n+1) + 12 = 2(n+4)^2 - 62$ și inegalitatea este demonstrată prin inducție. Pentru $n = 4$ am văzut că inegalitatea devine egalitate pentru graful K_4 cu șirul gradelor 3, 3, 3, 3. Vom demonstra prin inducție după n că există un graf planar triangulat cu n vîrfuri și gradele vîrfurilor care mărginesc fața infinită egale respectiv cu 3, $n-1$, $n-1$, pentru care inegalitatea devine egalitate.

Într-adevăr, afirmația se verifică pentru $n = 4$. Presupunînd că afirmația este adevărată pentru n, fie G un graf planar cu proprietățile cerute.

Să presupunem că fața infinită a grafului G este mărginită de ciclul $[a, b, c, a]$ și $d(a) = 3$, $d(b) = n-1$ și $d(c) = n-1$. Vom defini un graf planar G_1 cu proprietățile cerute astfel: Considerăm un nou vîrf x_{n+1} pe fața infinită a grafului G, pe care îl unim prin muchii cu a, b, c ca în figura 10.8. Noua față infinită a grafului G_1 este mărginită de ciclul $[b, c, x_{n+1}, b]$ și $d(x_{n+1}) = 3$, $d(a) = 4$, $d(b) = n$ și $d(c) = n$. G_1 este o triangulație și $S_1 = S + 9 + 2n^2 - 2(n-1)^2 + 16 - 9 = S + 4n + 14$.

Însă conform ipotezei de inducție $S = 2(n+3)^2 - 62$, deci $S_1 = 2(n+3)^2 - 62 + 4n + 14 = 2(n+4)^2 - 62$ și proprietatea este demonstrată.

Folosind faptul că funcția $x^{\alpha-1}: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este convexă pentru $\alpha \geqslant 2$, se poate demonstra pe o cale analoagă cu cea prezentată aici că:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^{\alpha} \leqslant 2(n-1)^{\alpha} + (n-4)4^{\alpha} + 2 \cdot 3^{\alpha} \tag{2}$$

pentru orice graf planar G cu $n \geqslant 4$ vîrfuri și $\alpha \geqslant 2$.

Egalitatea are loc pentru graful planar construit în cazul $\alpha = 2$, care are gradele $d_1 = d_2 = n-1$; $d_3 = \ldots = d_{n-2} = 4$; $d_{n-1} = d_n = 3$.

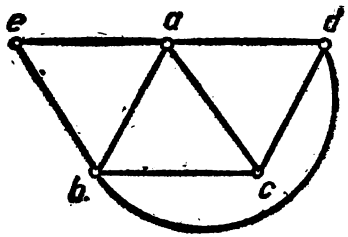


Fig. 10.7

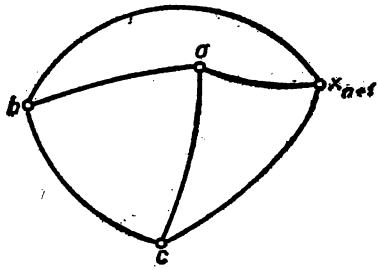


Fig. 10.8

Pentru $\alpha = 1$ inegalitatea (2) devine egalitate pentru orice triangulație a planului și exprimă faptul că numărul muchiilor unei triangulații este egal cu $3n - 6$ (conform problemei 10.6).

10.14. Să notăm cu $U = \{u_1, ..., u_m\}$ mulțimea muchiilor grafului G și $A_i = \{f : X \to \{1, ..., \lambda\} \mid f(x) = f(y)$, unde $u_i = [x, y]\}$. Numărul funcțiilor f care verifică condiția impusă este egal cu:

$$P_G(\lambda) = \lambda^n - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m|.$$

Putem evalua cardinalul mulțimii $A_1 \cup ... \cup A_m$ folosind principiul includerii și al excluderii (problema 2.2):

$$|A_1 \cup ... \cup A_m| = \sum_{\substack{V \subseteq U \\ V \neq \emptyset}} (-1)^{|V|-1} p(V, \lambda),$$

unde $p(V, \lambda)$ reprezintă numărul funcțiilor $f : X \to \{1, ..., \lambda\}$ care iau o aceeași valoare pentru extremitățile fiecărei muchii din V. Rezultă că aceste funcții au o aceeași valoare din mulțimea $\{1, ..., \lambda\}$ pentru fiecare componentă conexă a grafului parțial (X, V) al lui G. Deci $p(V, \lambda) = \lambda^{c(V)}$. Cu aceasta, expresia pentru polinomul cromatic al grafului G este justificată ținînd seama că termenul λ^n se obține pentru $V = \emptyset$, cînd graful parțial (X, V) este format numai din vîrfuri izolate și deci are n componente conexe.

Se observă că singurul termen de gradul n se obține pentru $V = \emptyset$ și anume λ^n, iar termenii de gradul $n - 1$ se obțin pentru $|V| = 1$.

În acest caz există $\binom{m}{1} = m$ termeni egali cu $-\lambda^{n-1}$, deci putem scrie:

$$P_G(\lambda) = \lambda^n - m\lambda^{n-1} + ...,$$

unde m este numărul muchiilor grafului G.

Dacă se notează $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n$, obținem în mod analog că $a_2 = \binom{m}{2} - c_3(G)$, unde $c_3(G)$ reprezintă numărul triunghiurilor grafului G. Termenii de gradul $n - 2$ se obțin pentru $c(V) = n - 2$, cînd $|V| = 2$ și graful parțial (X, V) al lui G conține numai două muchii, adiacente sau nu, sau pentru $|V| = 3$, cînd graful parțial (X, V) conține trei muchii care formează un triunghi.

Deoarece două muchii pot fi alese în $\binom{m}{2}$ moduri, rezultă expresia coeficientului a_2.

10.15. Dacă o λ-colorare f a grafului $G - e$ are proprietatea că $f(x) \neq f(y)$, unde $e = [x, y]$, atunci f este o λ-colorare și pentru G și reciproc. Rezultă că $P_{G-e}(\lambda) - P_G(\lambda)$ este numărul acelor λ-colorări f ale lui $G - e$ cu proprietatea că $f(x) = f(y)$.

O astfel de λ-colorare f a lui $G - e$ produce o λ-colorare g a grafului $G \mid e$, definind $g(z) = f(x) = f(y)$ și $g(t) = f(t)$ pentru orice $t \neq z$. Reciproc, orice λ-colorare g a grafului $G \mid e$ induce o λ-colorare f a lui $G - e$ cu proprietatea $f(x) = f(y)$, definind $f(x) = f(y) = g(z)$ și $f(t) = g(t)$ pentru orice $t \neq x, y$. Ambele corespondențe fiind injective, rezultă:

$$P_{G-e}(\lambda) - P_G(\lambda) = P_{G|e}(\lambda)$$

pentru orice număr natural λ.

Deoarece în ambii membri ai egalității avem polinoame de un grad dat, rezultă egalitatea între polinoamele cromatice pentru orice λ.

10.16. a) Dacă K_n are mulțimea vîrfurilor $\{x_1, ..., x_n\}$, o λ-colorare f poate fi definită în x_1 în λ moduri, în x_2 în $\lambda - 1$ moduri, ..., în x_n în $\lambda - n + 1$ moduri, rezultînd în final

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)$$

posibilități de a defini funcția f astfel încît să ia valori diferite două cîte două pentru toate vîrfurile $x_1, ..., x_n$.

b) Dacă x este un vîrf de gradul 1 al lui T_n, să notăm prin $T_n - x$ arborele care se obține din T_n prin suprimarea vîrfului x și a muchiei incidente cu x. Orice λ-colorare a lui $T_n - x$ poate fi extinsă în $\lambda - 1$ moduri la o λ-colorare a lui T_n, deci

$$P_{T_n}(\lambda) = (\lambda - 1) P_{T_n - x}(\lambda).$$

Continuînd în acest mod obținem

$$P_{T_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} P_{T_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

deoarece polinomul cromatic al arborelui cu un singur vîrf este λ.

c) Dacă e este o muchie a ciclului C_n, aplicînd proprietatea din problema 10.15 obținem:

$$P_{C_n}(\lambda) = P_{C_n - e}(\lambda) - P_{C_n | e}(\lambda),$$

$C_n - e$ este un lanț cu n vîrfuri și deci conform b) avem $P_{C_n - e}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$, iar $C_n | e$ este un ciclu cu $n - 1$ vîrfuri. Obținem:

$$P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(\lambda)$$

și repetînd același raționament se deduce:

$$P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - \lambda(\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \lambda(\lambda - 1),$$

deoarece $P_{C_3}(\lambda) = P_{K_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 1)$.

Putem scrie $\lambda(\lambda - 1)^{p-1} = (\lambda - 1 + 1)(\lambda - 1)^{p-1} = (\lambda - 1)^p + (\lambda - 1)^{p-1}$ pentru $2 \leqslant p \leqslant n$, deci:

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-2} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2}(\lambda - 1)^2 + (-1)^{n-2}(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

10.17. Vom demonstra ambele proprietăți prin inducție după numărul de muchii ale grafului G. Pentru graful cu n vîrfuri izolate obținem $P_G(x) = x^n$, care are forma dorită.

Să presupunem proprietatea de alternanță a semnelor coeficienților polinomului cromatic adevărată pentru toate grafurile cu n vîrfuri și $m \leqslant p - 1$ muchii și să o demonstrăm pentru un graf oarecare G cu n vîrfuri și $p \leqslant \binom{n}{2}$ muchii.

Fie e o muchie a lui G. Conform proprietății din problema 10.15, obținem:

$$P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G|e}(x). \qquad (1)$$

Deoarece grafurile $G-e$ și $G|e$ au cel mult $p-1$ muchii, putem aplica ipoteza de inducție, găsind:

$$P_{G-e}(x) = x^n - b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}b_1x$$

$$P_{G|e}(x) = x^{n-1} - c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}c_1x, \text{ unde}$$

b_i, $c_i \geqslant 0$. Înlocuind în (1) găsim:

$$P_G(x) = x^n - (b_{n-1} + 1)x^{n-1} + (b_{n-2} + c_{n-2})x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}(b_1 + c_1)x,$$

ceea ce demonstrează prima proprietate.

Graful G care are cu o muchie mai mult decît $G-e$ are coeficientul $a_{n-1} = b_{n-1} + 1$, iar $a_{n-1} = 0$ pentru graful cu n vîrfuri și fără nici o muchie. Mai rezultă deci că a_{n-1} este numărul muchiilor grafului G.

Fie acum G un graf conex cu n vîrfuri. Vom demonstra că $a_i > 0$ prin inducție după numărul de muchii ale lui G. Dacă G are numărul minim de muchii, egal cu $n-1$, el este un arbore și conform problemei 10.16 polinomul său cromatic este

$$P_G(x) = x(x-1)^{n-1} = x^n - \binom{n-1}{1}x^{n-1} + \binom{n-1}{2}x^{n-2} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}x,$$

deci inegalitatea $a_i > 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n-1$ este verificată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice graf conex cu n vîrfuri și m muchii, care verifică

$$n - 1 \leqslant m \leqslant p - 1$$

și să o demonstrăm pentru un graf conex G cu n vîrfuri și $p \leqslant \binom{n}{2}$ muchii.

Presupunînd că G nu este arbore, există o muchie e astfel încît $G-e$ este graf conex. Graful $G|e$ obținut prin identificarea extremităților muchiei e este de asemenea conex și folosind notațiile anterioare găsim:

$$a_i = b_i + c_i \text{ pentru } i = 1, \ldots, n-1 \text{ cu } c_{n-1} = 1, \text{ deci } a_i > 0$$

conform ipotezei de inducție.

10.18. Dacă graful G are componentele $G_1, \ldots, G_m$, o λ-colorare poate fi definită pe vîrfurile unei componente independent de modul de definire pe vîrfurile din celelalte componente și obținem:

$$P_G(\lambda) \quad P_{G_1}(\lambda) \ldots P_{G_m}(\lambda).$$

Deci $P_G(\lambda)$ nu are nici o rădăcină în intervalul $(0,1)$ dacă și numai dacă fiecare polinom $P_{G_i}(\lambda)$ are aceeași proprietate pentru orice $i = 1, \ldots, m$.

În concluzie, putem presupune că graful G este conex și vom demonstra că $(-1)^{n-1}P_G(\lambda) > 0$ dacă graful G are n vîrfuri și $0 < \lambda < 1$.

Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul de muchii ale grafului G. Dacă G are un număr minim de muchii, egal cu $n-1$, el este un arbore și $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$, deci proprietatea este verificată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile conexe G cu $m \geqslant n-1$ muchii și să o demonstrăm pentru un graf G cu n vîrfuri și $m+1$ muchii.

Deoarece G are un număr de muchii mai mare ca $n-1$, rezultă că există o muchie e a lui G cu proprietatea că $G-e$ este conex. Graful $G \mid e$ obținut prin identificarea extremităților lui e este de asemenea conex, are $n-1$ vîrfuri și cel mult m muchii. Conform ipotezei de inducție, putem scrie:

$$(-1)^{n-1} P_{G-e}(\lambda) > 0 \text{ și } (-1)^{n-2} P_{G|e}(\lambda) > 0 \text{ pentru } 0 < \lambda < 1.$$

Conform proprietății din problema 10.15, avem:

$$(-1)^{n-1} P_G(\lambda) = (-1)^{n-1}(P_{G-e}(\lambda) - P_{G|e}(\lambda)) = (-1)^{n-1} P_{G-e}(\lambda) \oplus$$

$$+ (-1)^{n-2} P_{G|e}(\lambda) > 0 \text{ pentru orice } 0 < \lambda < 1.$$

Rezultă că $P_G(\lambda)$ nu are nici o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

Deoarece $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0, 1)$, rezultă că $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ nu este rădăcină a nici unui polinom cromatic $P_G(\lambda)$. Polinoamele cromatice avînd coeficienții numere raționale, rezultă că nici $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \tau + 1$ nu este rădăcină a unui polinom cromatic $P_G(\lambda)$, oricare ar fi graful G.

10.19. Dacă x este un vîrf de grad maxim, există D muchii incidente cu x, care deci au o extremitate comună. Rezultă inegalitatea:

$$q(G) \geqslant D.$$

Pentru a demonstra inegalitatea $q(G) \leqslant D + 1$, vom proceda prin inducție după numărul m al muchiilor grafului. Dacă $m = 1$ atunci $q(G) = 1$ și $D = 1$, deci inegalitatea este verificată. Presupunînd că $q(G) \leqslant D + 1$ pentru toate grafurile cu cel mult $m-1$ muchii, fie G un graf cu m muchii și gradul maxim D.

Vom arăta că dacă toate muchiile lui G, cu excepția muchiei $e_1 = [v, w_1]$ au fost colorate, conform ipotezei de inducție, cu $D + 1$ culori, astfel încît două muchii cu o extremitate comună să aibă culori diferite, există o colorare cu $D + 1$ culori a muchiilor lui G, sau $q(G) \leqslant D + 1$.

Într-adevăr, conform ipotezei de inducție există o colorare cu $D' + 1$ culori a muchiilor grafului G_1 obținut din G prin suprimarea muchiei $[v, w_1]$. Dar $D' = D$ sau $D' = D - 1$, deci $D' \leqslant D$ și va exista o colorare cu cel mult $D + 1$ culori a muchiilor grafului G_1 care verifică condiția impusă.

Să arătăm că această colorare poate fi extinsă și la muchia e_1. Deoarece gradul maxim al lui G este D, rezultă că printre muchiile incidente cu v și cu w_1 lipsește cel puțin o culoare dintre cele $D + 1$ culori.

Dacă culoarea lipsă în v și w_1 este aceeași, putem colora cu ea muchia e_1 și demonstrația este încheiată. În caz contrar, fie α culoarea absentă printre muchiile incidente cu v și $\beta_1 \neq \alpha$ culoarea lipsă printre muchiile incidente cu w_1.

1) Fie $e_2 = [v, w_2]$ muchia incidentă cu v de culoare β_1. Există o astfel de muchie, căci în caz contrar ar lipsi o aceeași culoare printre muchiile incidente cu v și w_1, contrar ipotezei. Vom șterge culoarea muchiei e_2 și vom colora cu β_1 muchia e_1. Presupunem că vîrfurile v, w_1, w_2 aparțin aceleiași componente conexe a grafului parțial al lui G format din vîrfurile lui G și din muchiile colorate cu α sau cu β_1 și notat $H(\alpha, \beta_1)$, deoarece în caz contrar schimbăm între ele culorile α și β_1 în componenta care conține vîrful w_2, fără a schimba culoarea β_1 a lui e_1. Deoarece muchia e_2 avea culoarea β_1, înseamnă că în w_2 nu putea fi incidentă o altă muchie cu culoarea β_1 și prin

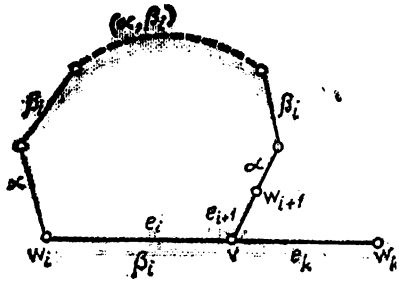


Fig. 10.9

interschimbarea lui α cu β_1, în w_2 a devenit disponibilă culoarea α, care lipsește și dintre culorile muchiilor incidente în v. Rezultă că putem colora cu α muchia $e_2 = [v, w_2]$ și am găsit colorarea muchiilor grafului G cu cel mult $D + 1$ culori.

Rămîne să considerăm cazul cînd vîrfurile v, w_1, w_2 aparțin aceleiași componente a grafului $H(\alpha, \beta_1)$.

2) Fie $\beta_2 \neq \beta_1$ o culoare care lipsește muchiilor incidente cu w_2. Putem presupune că β_2 este o culoare a unei muchii incidente în v, căci în caz contrar demonstrația este încheiată, colorînd muchia e_2 cu β_2.

Fie $e_3 = [v, w_3]$ muchia cu culoarea β_2 incidentă în v. Vom șterge culoarea β_2 a muchiei e_3 și vom colora muchia e_2 cu culoarea β_2, deoarece β_2 nu apare în w_2.

Urmînd același raționament ca la 1), putem considera numai cazul cînd v, w_2, w_3 aparțin aceleiași componente a grafului parțial $H_1(\alpha, \beta_2)$.

3) Numărul culorilor fiind finit, iar culorile $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ fiind diferite două cîte două, rezultă că sau putem colora toate muchiile incidente în v, obținînd pentru graful G o colorare a muchiilor cu cel mult $D + 1$ culori, fie ajungem la situația următoare:

Nu mai putem colora prin operațiile de tipul 1) și 2) ultima muchie căreia i-am șters culoarea β_{k-1}, fie $[v, w_k]$, deoarece orice culoare absentă din w_k este o culoare β_i unde $i < k - 1$.

De asemenea, putem presupune că v, w_i, w_{i+1} aparțin aceleiași componente C a grafului parțial $H(\alpha, \beta_i)$, deci există un lanț de extremități w_i și w_{i+1} format numai din muchii colorate alternativ cu culorile α și β_i. Deoarece culoarea α nu apare la muchiile incidente în v și nici β_i la muchiile incidente în w_{i+1}, rezultă că C este un lanț de la v la w_{i+1} care trece prin w_i și care conține numai muchii colorate alternativ cu culorile α și β_i (fig. 10.9).

Acest lanț nu conține vîrful w_k, deoarece β_i nu apare printre culorile muchiilor cu o extremitate în w_k. Dacă C_1 este componenta lui $H(\alpha, \beta_i)$ care îl conține pe w_k, rezultă că C și C_1 sînt disjuncte, deoarece în caz contrar ele ar forma o singură componentă, ceea ce este absurd, ținînd seama de forma lui C și de faptul că în w_k lipsește culoarea β_i.

Deci în componenta C_1 putem interschimba culorile α și β_i, fără ca în vîrful v să apară culoarea α pentru muchia $[v, w_i]$, de culoare β_i.

Deoarece în w_k lipsea culoarea β_i, rezultă că după interschimbarea culorilor în C_1, în vîrful w_k va lipsi culoarea α, care lipsește și în v. Deci putem colora muchia $[v, w_k]$ cu culoarea α, ceea ce produce pentru muchiile lui G o colorare cu $D + 1$ culori.

Obținem $q(G) = D + 1$ de exemplu pentru un ciclu impar C_{2s+1}, pentru care $q(C_{2s+1}) = 3$ și $D = 2$.

10.20. Numărul muchiilor care pot fi colorate cu o aceeași culoare, neavînd două cîte două extremități comune, este cel mult egal cu $\frac{n}{2}$. Deci pentru n par există cel mult $\frac{n}{2}$ muchii care pot fi colorate cu o aceeași culoare iș pentru n impar există cel mult $\frac{n-1}{2}$ muchii care pot fi colorate cu o aceeași culoare.

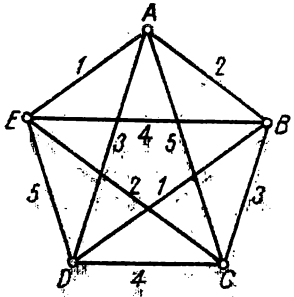


Fig. 10.10

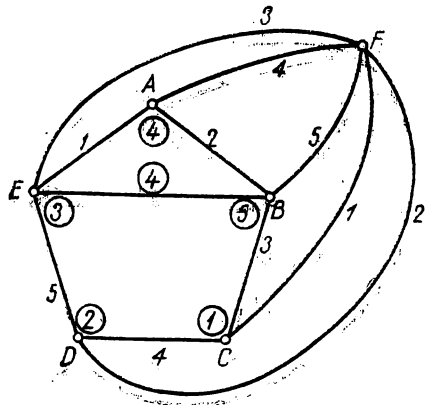


Fig. 10.11

Deoarece graful complet K_n are $\binom{n}{2}$ muchii obținem deci $q(K_n) \geqslant n-1$ pentru n par și $q(K_n) \geqslant n$ pentru n impar.

Vom demonstra că au loc și inegalitățile contrare, deci egalitățile cerute, printr-o construcție care să realizeze colorarea muchiilor lui K_n cu n culori pentru n impar și cu $n-1$ culori pentru n par.

Să reprezentăm vîrfurile grafului K_5 prin vîrfurile unui pentagon regulat $ABCDE$. Vom colora laturile pentagonului cu culorile 1, 2, ..., 5, iar toate diagonalele paralele cu o latură le vom colora cu aceeași culoare ca și latura respectivă (fig. 10.10). Se obține o colorare cu 5 culori a muchiilor lui K_5 care verifică condiția ca două muchii avînd o extremitate comună să aibă culori diferite.

Să observăm că în acest mod în fiecare vîrf a devenit disponibilă o culoare. De exemplu, în vîrful A nu este incidentă nici o muchie avînd culoarea 4. Deoarece mulțimea culorilor disponibile în toate vîrfurile este mulțimea celor 5 culori folosite pentru a colora muchiile lui K_5, rezultă că luînd un nou vîrf F pe care îl unim cu toate vîrfurile pentagonului, colorarea muchiilor lui K_5 cu 5 culori se extinde în mod unic la o colorare a muchiilor lui K_6 cu 5 culori. De exemplu, muchiei AF îi vom atribui culoarea 4 care era disponibilă în vîrful A ș.a.m.d. (fig. 10.11). Construcția făcută se extinde în mod analog la orice grafuri K_n și K_{n+1}, cu n impar.

10.21. Reprezentînd șahiștii prin vîrfurile grafului complet K_n, partidele desfășurate într-o zi se pot reprezenta printr-o mulțime de muchii care nu au două cîte două extremități comune.

Rezultă că numărul minim de zile în care se poate termina turneul este egal cu numărul minim de culori necesare pentru a colora muchiile lui K_n, astfel încît oricare două muchii cu o aceeași extremitate să aibă culori diferite.

Într-adevăr, putem colora cu o aceeași culoare muchiile corespunzătoare partidelor care se desfășoară în aceeași zi.

Deci numărul minim de zile este $q(K_n)$, deci n zile pentru n impar și $n-1$ zile pentru n par, ținînd seama de problema precedentă.

10.22. Proprietatea se demonstrează prin inducție după numărul n al vîrfurilor grafului. Pentru $n = 1$ sau 2 rezultatul este imediat pentru orice $1 \leqslant k \leqslant n$.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult $n-1$ vîrfuri.

Fie G un graf cu n vîrfuri și numărul cromatic $\chi(G) = k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Vom nota cu x un vîrf al grafului și cu G_x subgraful obținut prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x. Numărul colorărilor minimale, cu $\chi(G)$ culori, ale grafului G va fi notat $C_m(G)$.
Dacă $\chi(G_x) = k$, obținem:

$$C_m(G) \leqslant kC_m(G_x) \leqslant k \cdot k^{n-k-1} = k^{n-k},$$

inegalitățile devenind egalități numai în cazul în care x este un vîrf izolat și subgraful G_x are un număr maxim de colorări minimale, deoarece vîrful x poate fi adăugat unei partiții minimale cu k clase a lui G_x în cel mult k moduri diferite.

Dacă însă $\chi(G_x) = k - 1$, o colorare minimă a lui G este următoarea: $\{x\}, C_1, \ldots, C_{k-1}$, unde mulțimile $C_1, \ldots, C_{k-1}$ sînt formate din vîrfuri neadiacente două cîte două și există $k - 1$ vîrfuri $x_1 \in C_1, \ldots, x_{k-1} \in C_{k-1}$ care sînt adiacente cu x, deoarece în caz contrar am avea $\chi(G) \leqslant k - 1$.

Dacă X este mulțimea vîrfurilor grafului G, orice k-colorare a lui G are o clasă care conține vîrful x și o submulțime a mulțimii $X \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Deoarece în mulțimea $X \setminus \{x, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ sînt $n - k$ elemente, rezultă că numărul de k-colorări ale lui X care conțin într-o aceeași clasă vîrful x și r vîrfuri din mulțimea $X \setminus \{x, x_1, \ldots, x_{n-k}\}$, unde $0 \leqslant r \leqslant n - k$, este majorat de $\binom{n-k}{r}(k-1)^{n-k-r}$, în virtutea ipotezei de inducție. Într-adevăr, cele r vîrfuri pot fi alese dintre cele $n - k$ vîrfuri în $\binom{n-k}{r}$ moduri distincte și numărul maxim de $(k-1)$-colorări ale unui graf G cu $n - k - r$ vîrfuri și $\chi(G) = k - 1$ este egal cu $(k-1)^{n-k-r}$. Deci putem scrie:

$$C_m(G) \leqslant \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r} (k-1)^{n-k-r} = k^{n-k},$$

egalitatea avînd loc numai în cazul cînd $\{x, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ induce un subgraf complet și restul de $n - k$ vîrfuri sînt izolate. Deci am arătat prin inducție că $C_m(G) \leqslant k^{n-k}$ pentru orice graf G cu n vîrfuri și numărul cromatic egal cu k, marginea superioară fiind atinsă numai în cazul în care G este format dintr-un k-subgraf complet și din $n - k$ vîrfuri izolate. Să observăm că acest graf este unicul graf G cu $\chi(G) = k$ și numărul minim de muchii, egal cu $\binom{k}{2}$.

(I. Tomescu, C.R. Acad. Sci. Paris, A272 (1971), 1301—1303.)

10.23. Să notăm numărul căutat de colorări cu $C(n, k)$. Este clar că $C(n, n) = C(n, 2) = 1$ pentru orice $n \geqslant 2$ și $C(n, k) = 0$ pentru $k > n$. Vom demonstra prin inducție după n că $C(n, k) = S(n-1, k-1)$ pentru orice arbore A cu n vîrfuri. Pentru $n = 2$ proprietatea este adevărată. Presupunînd că proprietatea este adevărată pentru orice arbore cu cel mult $n - 1$ vîrfuri, obținem $C(n, k) = S(n-2, k-2) + (k-1)\,S(n-2, k-1)$.

Într-adevăr, orice arbore A cu n vîrfuri conține un vîrf x de gradul unu, astfel încît subgraful A_x obținut din A prin suprimarea vîrfului x este un arbore cu $n - 1$ vîrfuri. Mulțimea celor $C(n, k)$ colorări ale lui A se poate scrie ca reuniunea mulțimii de k-colorări pentru care vîrful x este singur într-o clasă a partiției, în număr de $S(n-2, k-2)$, adică a numărului de $(k-1)$-colorări ale arborelui A_x și a mulțimii de k-colorări pentru care vîrful x apare într-o clasă împreună cu alte vîrfuri ale arborelui. Deoarece x

este adiacent cu un singur alt vîrf al arborelui, rezultă că x poate fi adăugat în exact k — 1 clase ale unei k - colorări a unui arbore cu n — 1 vîrfuri, deci această mulțime de colorări conține $(k - 1)S(n - 2, k - 1)$ colorări, conform ipotezei de inducție. Ținînd seama de relația de recurență a numerelor lui Stirling de speța a doua (problema 3.4), găsim că $C(n, k) = S(n - 1, k - 1)$ pentru orice arbore A cu n vîrfuri.

10.24. Vom demonstra proprietatea prin inducție după k. Pentru $k = 1$ graful G nu conține nici o muchie și este suficient să alegem $H = G$. În acest caz avem $d_H(x) = d_G(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, iar graful H este monocromatic, fiind format din vîrfuri izolate.

Să presupunem proprietatea adevărată pentru toate grafurile care nu conțin subgrafuri complete cu $k + 1$ vîrfuri și fie G un graf care nu conține subgrafuri complete cu $k + 2$ vîrfuri.

Fie x un vîrf de grad maxim al lui G. Să notăm cu X_1 mulțimea vîrfurilor adiacente cu x și cu G_1 subgraful indus de mulțimea de vîrfuri X_1.

G_1 nu conține subgrafuri complete cu $k + 1$ vîrfuri, deci aplicînd ipoteza de inducție rezultă existența unui graf H_1 cu mulțimea vîrfurilor X_1, care este k-cromatic și verifică

$$d_{H_1}(z) \geqslant d_{G_1}(z) \text{ pentru orice } z \in X_1.$$

Vom defini graful H cu mulțimea vîrfurilor X legînd prin muchii toate vîrfurile din $X \setminus X_1$ cu toate vîrfurile din X_1 și de asemenea toate perechile de vîrfuri din X_1 care erau adiacente în graful H_1. Graful H este $(k + 1)$-cromatic prin construcție, deoarece $\chi(H_1) = k$. Dacă $y \notin X_1$, obținem:

$$d_H(y) = |X_1| = d_G(x) \geqslant d_G(y),$$

iar dacă $y \in X_1$ deducem:

$$d_H(y) = |X| - |X_1| + d_{H_1}(y) \geqslant$$
$$\geqslant |X| - |X_1| + d_{G_1}(y) \geqslant d_G(y),$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

Fie acum G un graf cu n vîrfuri, fără subgrafuri complete cu $k + 1$ vîrfuri și $A_1, \ldots, A_k$ submulțimile de vîrfuri monocromatice ale lui H.

Notăm $|A_i| = a_i$ și deci $a_1 + \ldots + a_k = n$ și fie U, respectiv V mulțimea muchiilor grafurilor G și H. Obținem:

$$|U| = \frac{1}{2}\sum_{x \in X} d_G(x) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{x \in X} d_H(x) = |V| \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} a_i a_j,$$

deoarece pot exista muchii în graful H numai între vîrfuri aparținînd unor mulțimi A_i și A_j distincte.

Ultima sumă este maximă dacă și numai dacă avem $|a_i - a_j| \leqslant 1$, deci $a_1 = \ldots = a_r = m + 1$ și $a_{r+1} = \ldots = a_k = m$, unde $m = \left[\frac{n}{k}\right]$ și r este restul împărțirii lui n la k. Se observă că această limită se poate atinge numai dacă ultima inegalitate devine egalitate, deci în clasa grafurilor multipartite complete, adică teorema lui Turán (problema 9.9).

(P. Erdös, Mat. Lapok, 21(1970), 249—251.)

11.1. Fie cele două părți ale lui $K_{n,n}$ notate $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, muchiile fiind de forma $[x_i, y_j]$ cu $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Deoarece orice ciclu hamiltonian trece prin x_1, să vedem în cîte moduri putem trasa un ciclu hamiltonian care pleacă din x_1 și se întoarce în x_1.

Din x_1 putem pleca în unul din vîrfurile lui Y în n moduri, de aici ne întoarcem într-un vîrf al lui X, diferit de x_1, în $n - 1$ moduri, de aici plecăm într-un vîrf al lui Y, diferit de vîrful deja parcurs în $n - 1$ moduri ș.a.m.d. În momentul cînd am ajuns în X în ultimul vîrf nevizitat, mai există în Y un vîrf neparcurs pe care îl parcurgem și ne reîntoarcem în x_1. Numărul de cicluri obținute este egal cu:

$$n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)\ldots 1 \cdot 1 = (n-1)!n!.$$

Familia de cicluri astfel obținute conține fiecare ciclu exact de două ori, corespunzînd celor două posibilități de parcurgere a ciclului într-un sens sau în celălalt. Deci $K_{n,n}$ conține exact $\frac{1}{2}(n-1)!n!$ cicluri care trec o singură dată prin fiecare vîrf.

11.2. Pentru $h = 0$ obținem $\frac{(n-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene ale grafului complet K_n, deci formula se verifică. Într-adevăr, fiecare ciclu hamiltonian definește o permutare circulară a vîrfurilor lui K_n, iar numărul permutărilor circulare a n elemente este egal cu $(n-1)!$. Dintr-un același ciclu hamiltonian se pot obține două permutări circulare distincte prin parcurgerea într-un sens sau în altul a ciclului, deci numărul ciclurilor hamiltoniene ale lui K_n este egal cu $\frac{1}{2}(n-1)!$. Formula se mai poate verifica prin inducție matematică, deoarece pentru $n = 3$ graful K_3 este un ciclu hamiltonian. Presupunînd formula adevărată pentru $n \leqslant m$, fie K_{m+1} graful complet cu $m + 1$ vîrfuri: $x_1, \ldots, x_{m+1}$. Fiecare ciclu hamiltonian al lui K_{m+1} se obține dintr-un ciclu hamiltonian al lui K_m prin intercalarea vîrfului x_{m+1} între două vîrfuri vecine ale ciclului. Deoarece fiecare ciclu hamiltonian al lui K_m generează în acest mod m cicluri diferite ale lui K_{m+1} și conform ipotezei de inducție K_m are $\frac{(m-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene, rezultă că numărul ciclurilor hamiltoniene ale lui K_{m+1} este egal cu $\frac{(m-1)!}{2}m = \frac{m!}{2}$, deci proprietatea este valabilă pentru orice $m \geqslant 3$.

Dacă $h \geqslant 1$ să presupunem că cele h muchii se înlocuiesc prin cîte un nou vîrf, obținîndu-se un graf complet cu $n - h$ vîrfuri, care are $\frac{(n-h-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene. Dacă z este un vîrf care a înlocuit muchia $[x, y]$ și într-unul din cele $\frac{(n-h-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene vecinii săi sînt u și v, muchia $[x, y]$ va înlocui vîrful z în acest ciclu hamiltonian în exact două moduri distincte.

Într-adevăr, se înlocuiește lanțul $[u, z, v]$ prin $[u, x, y, v]$ sau prin $[u, y, x, v]$. Efectuînd această operație pentru toate vîrfurile care reprezintă cele h muchii, obținem $\frac{(n-h-1)!}{2}2^h = (n-h-1)!2^{h-1}$ cicluri hamiltoniene distincte două cîte două care trec prin cele h muchii date.

Să observăm că orice ciclu hamiltonian care trece prin cele h muchii se obține în acest mod fără repetiție și de asemenea cele h muchii neavînd vîrfuri comune rezultă $2h \leqslant n$.

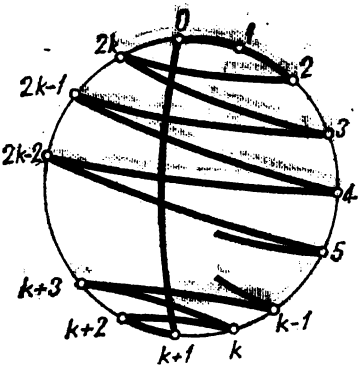


Fig. 11.1

11.3. Dacă vîrfurile lui K_n sînt numerotate 0, 1, 2, ..., $2k$, vom considera următorul ciclu hamiltonian:

$$C_1 = [0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, 2k-2, 5, \ldots, k+3, k, k+2, k+1, 0],$$

reprezentat în figura 11.1.

Vom aduna 1 modulo $2k$ tuturor numerelor nenule din acest șir de $k-1$ ori, obținînd în total $k = (n-1)/2$ cicluri hamiltoniene. Pentru a arăta că aceste cicluri hamiltoniene sînt disjuncte relativ la muchii, vom considera suma modulo $2k$ a oricăror două numere consecutive nenule din aceste șiruri.

Pentru C_1 aceste sume formează mulțimea $\{2, 3\}$, deci adunînd mereu 2 modulo $2k$ obținem mulțimile disjuncte de numere:

$$\{4, 5\}, \{6, 7\}, \ldots, \{2k-2, 2k-1\}, \{0, 1\}.$$

Deci cele k cicluri hamiltoniene sînt disjuncte relativ la muchii. De aici rezultă că ele acoperă toate muchiile lui K_n, deoarece K_n conține $\frac{n(n-1)}{2}$ muchii, iar cele $(n-1)/2$ cicluri hamiltoniene astfel construite conțin fiecare cîte n muchii.

11.4. a) Să presupunem, prin reducere la absurd, că G nu conține un ciclu hamiltonian.

Vom adăuga muchii atît timp cît este posibil, cu condiția ca G să nu conțină nici un ciclu hamiltonian. Prin aceasta gradele vîrfurilor cresc, deci condițiile a), b) și c) rămîn în continuare verificate și deci putem presupune că G este saturat, adică adăugînd o nouă muchie într-un mod oarecare graful obținut conține un ciclu hamiltonian. Dacă $[x, y]$ nu este muchie a lui G, prin adăugarea acestei muchii la graful G apare un ciclu hamiltonian. Deci G conține un lanț hamiltonian:

$$L = [z_1 = x, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = y]$$

care unește vîrful x cu y.

Să notăm cu $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ nodurile adiacente cu x, unde $2 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Rezultă că y nu poate fi adiacent cu z_{i_s-1} pentru $s = 1, \ldots, k$, deoarece în caz contrar G conține ciclul hamiltonian:

$$[z_1, \ldots, z_{i_s-1}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_{i_s}, z_1].$$

Deci $d(y) \leqslant n-1-k = n-1-d(x) \leqslant n-1-\frac{n}{2} < \frac{n}{2}$, ceea ce contrazice condiția $d_1 \geqslant \frac{n}{2}$.

Deci dacă $\min(d_1, \ldots, d_n) \geqslant \frac{n}{2}$, atunci G conține un ciclu hamiltonian.

Să presupunem acum că are loc condiția c) și G nu este hamiltonian, dar unind printr-o muchie oricare două vîrfuri neadiacente se obține un ciclu hamiltonian.

Să considerăm două vîrfuri neadiacente x_k, x_l astfel încît $k < l$ și suma $k + l$ să fie maximă.

Rezultă că x_k este adiacent cu toate vîrfurile $x_{l+1}, \ldots, x_n$, deci

$$d_k \geqslant n - l. \tag{1}$$

La fel obținem că x_l este adiacent cu vîrfurile $x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n$, ceea ce implică:

$$d_l \geqslant n - k - 1. \tag{2}$$

Folosind același tip de raționament ca la a) obținem de asemenea:

$$d_k + d_l \leqslant n - 1. \tag{3}$$

Din ultimele două inegalități deducem:

$$d_k \leqslant n - 1 - d_l \leqslant n - 1 - (n - k - 1) = k.$$

Să notăm $m = d_k$. Am obținut $m \leqslant k$ și deci conform ipotezei $d_m \leqslant d_k = m$. Deoarece $k < l$ deducem $d_k \leqslant d_l$ și din (3) rezultă

$$m = d_k < \frac{n}{2}.$$

Conform ipotezei, din c) obținem:

$$d_{n-m} \geqslant n - m = n - d_k \geqslant d_l + 1, \tag{4}$$

de unde rezultă:

$$n - d_k = n - m > l, \tag{5}$$

deoarece în caz contrar am avea:

$n - m \leqslant l$, deci $d_{n-m} \leqslant d_l$, ceea ce contrazice (4).

Din (5) obținem:

$$d_k < n - l,$$

ceea ce contrazice inegalitatea (1). Proprietatea este demonstrată.

Dacă are loc b), fie $d_k \leqslant k < \frac{n}{2}$ și $l = n - k$.

Dacă $d_l \geqslant l$ avem satisfăcută condiția c). În caz contrar obținem $d_l < l$ și conform condiției b), deoarece $k < n - k$ sau $k < \frac{n}{2}$, obținem $d_k + d_{n-k} \geqslant n$, de unde deducem $d_{n-k} \geqslant n - d_k \geqslant n - k$. Deci are loc din nou c), ceea ce am văzut că implică existența unui ciclu hamiltonian în graful G.

Dacă are loc c), s-a demonstrat că sau n este par și $G = K_{n/2, n/2}$, sau G este panciclic, adică are cicluri elementare de orice lungime k cu $3 \leqslant k \leqslant n$ (S.L. Hakimi, E.F. Schmeichel, J. Combinatorial Theory, B17 (1974), 22—34.)

11.5. Fie x, y două vîrfuri oarecare ale grafului G. Să arătăm că G conține un lanț hamiltonian care unește x cu y.

Dacă x și y nu sînt unite printr-o muchie, vom adăuga muchia $[x, y]$ la graful G, gradul fiecărui vîrf rămînînd superior lui $\frac{n}{2}$, iar orice lanț hamiltonian de extremități x și y nefolosind această muchie.

Vom insera un nou vîrf z pe muchia $[x, y]$, ceea ce va produce un nou graf G_1. Graful G_1 are un ciclu hamiltonian dacă și numai dacă G conține un lanț hamiltonian de extremități x și y.

Șirul gradelor vîrfurilor grafului G_1 este

$$2 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_{n+1},$$

unde $d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_{n+1}$ sînt gradele vîrfurilor grafului G.

Prin ipoteză avem $d_2 \geqslant \frac{n+1}{2}$, deci graful G_1 avînd $n+1$ vîrfuri, condiția c) din problema 11.4 este satisfăcută, deoarece nu există indici k astfel încît $d_k \leqslant k < \frac{n+1}{2}$. Într-adevăr, avem $d_1 = 2$ și $d_k \geqslant \frac{n+1}{2}$ pentru orice $k \geqslant 2$.

Rezultă că G_1 are un ciclu hamiltonian sau G are un lanț hamiltonian de extremități x și y.

11.6. Să adăugăm la graful G un nou vîrf y pe care să îl legăm prin muchii cu toate celelalte vîrfuri ale lui G. Graful obținut are $2n+2$ vîrfuri și gradele sale sînt cel puțin egale cu $n+1$, deci conform condiției a) a lui Dirac din problema 11.4, el are un ciclu hamiltonian.

Suprimînd vîrful y și muchiile incidente cu y găsim un lanț hamiltonian $[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}]$ în graful G.

Să presupunem prin reducere la absurd că graful G nu are nici un ciclu hamiltonian. Rezultă că dacă x_0 este adiacent cu un vîrf x_i, atunci x_{2n} nu este adiacent cu x_{i-1}, deoarece în caz contrar s-ar forma un ciclu hamiltonian.

Deoarece vîrfurile x_0 și x_{2n} au gradul n, mai rezultă că dacă x_0 nu este adiacent cu x_i, atunci x_{2n} este adiacent cu x_{i-1}.

Într-adevăr, x_0 este adiacent cu n vîrfuri x_i, deci x_{2n} nu este adiacent cu n vîrfuri de forma x_{i-1}, deci x_{2n} este adiacent cu toate cele n vîrfuri rămase.

Să presupunem mai întîi că x_0 este adiacent cu vîrfurile $x_1, \ldots, x_n$ și x_{2n} este adiacent cu $x_n, \ldots, x_{2n-1}$. Există un indice i cu $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît x_i nu este adiacent cu x_n, deoarece $d(x_n) = n$ și x_n este adiacent cu x_0, x_{n-1}, x_{n+1} și x_{2n}. Vîrful x_i este adiacent la rîndul său cu un vîrf x_j pentru $n+1 \leqslant j \leqslant 2n-1$, deoarece conform ipotezei $d(x_i) = n$. În acest caz graful G conține ciclul hamiltonian:

$$[x_i, x_{i-1}, \ldots, x_0, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{2n}, \ldots, x_j, x_i]$$

(vezi fig. 11.2).

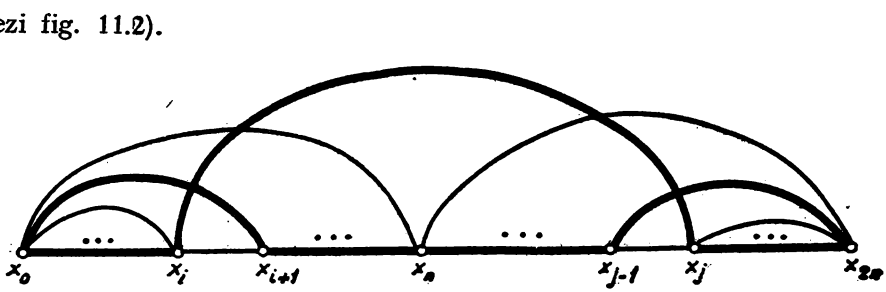


Fig. 11.2

În caz contrar există un indice i astfel încît $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, vîrful x_{i+1} este adiacent cu x_0 dar x_i nu este adiacent cu x_0. Rezultă, conform unei observații anterioare, că vîrful x_{i-1} este adiacent cu x_{2n} și obținem astfel în graful G un ciclu elementar cu $2n$ vîrfuri și anume $[x_{i-1}, \ldots, x_0, x_{i+1}, \ldots, x_{2n}, x_{i-1}]$.

Fie $C = [y_1, \ldots, y_{2n}, y_1]$ un ciclu elementar cu $2n$ vîrfuri în graful G și y_0 vîrful grafului G care nu aparține ciclului C.

Deoarece am presupus că G nu conține un ciclu hamiltonian, rezultă că y_0 nu poate fi adiacent cu două vîrfuri vecine ale lui C, căci în acest caz C poate fi prelungit la un ciclu hamiltonian. Deoarece $d(y_0) = n$, aceasta implică că y_0 este vecin cu toate vîrfurile ciclului C ai căror indici diferă cu cîte două unități modulo $2n$, de exemplu cu $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$. Înlocuind vîrful y_{2i} cu $1 \leqslant i \leqslant n$ prin y_0 găsim deci un alt ciclu elementar de lungime $2n$ și repetînd același raționament găsim că y_{2i} este adiacent cu $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. În concluzie, obținem că y_1 este adiacent cu $y_0, y_2, \ldots, y_{2n}$, deci

$$d(y_1) \geqslant n + 1,$$

ceea ce contrazice ipoteza că G este regulat de gradul n, deci $d(y_1) = n$. (C.St.J.A. Nash-Williams.)

Se poate arăta, urmînd o cale de demonstrație analoagă cu cea de mai înainte, că singurul graf regulat de grad n cu $2n + 2$ vîrfuri care nu este hamiltonian, este format din două copii disjuncte ale grafului complet K_{n+1}.

11.7. Fie C un ciclu elementar de lungime maximă în graful G. Să presupunem prin reducere la absurd că C nu este un ciclu hamiltonian. Să notăm cu G_1 o componentă conexă a subgrafului obținut din G prin suprimarea vîrfurilor ciclului C. Dacă $x_1, \ldots, x_s$ sînt vîrfurile ciclului C adiacente cu vîrfuri din G_1, oricare două dintre acestea nu sînt vîrfuri vecine ale ciclului C. Dacă de exemplu x_i și x_j sînt adiacente, înlocuind muchia $[x_i, x_j]$ a ciclului C cu un lanț cu extremitățile x_i și x_j care trece prin vîrfuri intermediare din G_1, am obține un ciclu mai lung ca C, ceea ce contrazice ipoteza.

Deplasîndu-ne de-a lungul ciclului C într-un sens oarecare, să notăm cu $y_1, \ldots, y_s$ vîrfurile vecine respectiv cu $x_1, \ldots, x_s$. Conform observației anterioare, obținem că $y_i \notin \{x_1, \ldots, x_s\}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant s$. Vom arăta că $y_1, \ldots, y_s$ sînt vîrfuri neadiacente două cîte două, deoarece în caz contrar dacă y_i și y_j sînt adiacente, vom suprima muchiile $[x_i, y_i]$ și $[x_j, y_j]$ ale ciclului C și le vom înlocui prin muchia $[y_i, y_j]$ și un lanț de extremități x_i și x_j care trece prin vîrfuri ale grafului G_1.

Se obține astfel un ciclu elementar mai lung ca C, ceea ce contrazice ipoteza (fig. 11.3).

Deoarece $x_1, \ldots, x_s$ sînt toate vîrfurile ciclului C adiacente cu vîrfuri din G_1, rezultă că alegînd un vîrf y_0 în G_1, mulțimea de vîrfuri $S = \{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$ este o mulțime intern stabilă de vîrfuri. Dacă suprimăm din graful G vîrfurile $x_1, \ldots, x_s$ se obțin cel puțin două componente, una dintre ele fiind G_1. Graful G fiind k-conex, conform definiției admite mulțimi disconectante cu cel puțin k vîrfuri, deci $s \geqslant k$. Dar aceasta implică:

$$|S| = s + 1 \geqslant k + 1,$$

ceea ce contrazice ipoteza! Deci graful G este hamiltonian.

(V. Chvátal, P. Erdös, Discrete Math., 2(1972), 111—113.)

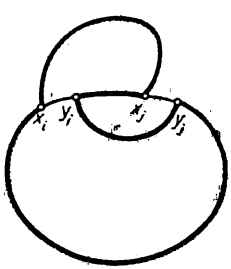


Fig. 11.3

11.8. Vom demonstra proprietatea prin inducție după n. Dacă $n = 3$ obținem $m \geq 3$, deci G este graful K_3 care este un ciclu hamiltonian.

Să presupunem proprietatea adevărată pentru toate grafurile cu cel mult $n-1$ vîrfuri și fie G un graf cu $n \geq 4$ vîrfuri și $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$ muchii.

Să arătăm că G conține un vîrf x cu gradul $d(x) = n-1$ sau $d(x) = n-2$. Presupunînd contrariul, obținem că $d(x) \leq n-3$ pentru orice vîrf x și deoarece $\Sigma d(x) = 2m$, obținem:

$$m \leq \frac{n(n-3)}{2},$$

ceea ce contrazice ipoteza $m \geq \frac{n^2-3n+6}{2}$. Vom studia în continuare două cazuri:

a) Există un vîrf x cu $d(x) = n-2$. Suprimînd vîrful x și cele $n-2$ muchii incidente cu acesta, găsim un subgraf G_1 cu $n-1$ vîrfuri și m_1 muchii astfel încît:

$$m_1 \geq \frac{n^2-3n+6}{2} - (n-2) = \binom{n-2}{2} + 2.$$

Conform ipotezei de inducție, G_1 conține un ciclu hamiltonian C_1 care trece o singură dată prin toate cele $n-1$ vîrfuri ale lui G_1:

$$C_1 = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_0].$$

Dacă există două vîrfuri vecine ale ciclului, x_i și x_{i+1} (unde suma se face modulo $n-1$), care sînt adiacente cu vîrful x, îl putem intercala pe x între x_i și x_{i+1} obținînd un ciclu hamiltonian C în graful G. În caz contrar, pentru orice $i = 0, \ldots, n-2$, dacă x este adiacent cu x_i rezultă că x nu este adiacent cu x_{i+1}, deci $d(x) \leq \frac{n-1}{2}$. Am obținut deci $n-2 \leq \frac{n-1}{2}$, ceea ce contrazice ipoteza că $n \geq 4$. Rezultă că G conține un ciclu hamiltonian.

b) Dacă nu există vîrfuri x cu $d(x) = n-2$, rezultă că există cel puțin două vîrfuri y_1 și y_2 cu $d(y_1) = d(y_2) = n-1$. Într-adevăr, în caz contrar am avea un singur vîrf de grad $n-1$ și celelalte $n-1$ vîrfuri de grad mai mic sau egal cu $n-3$, deci:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \leq m \leq \frac{(n-1) + (n-1)(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

ceea ce este absurd.

Suprimînd vîrfurile y_1 și y_2 și cele $2(n-1) - 1 = 2n-3$ muchii incidente cu acestea, obținem un subgraf G_2 cu $n-2$ vîrfuri și m_2 muchii astfel încît:

$$m_2 \geq \frac{n^2-3n+6}{2} - (2n-3) = \binom{n-3}{2}.$$

Dacă graful G_2 conține un ciclu hamiltonian C_2, atunci evident și G conține un ciclu hamiltonian C obținut din C_2 prin intercalarea, într-un mod oarecare, a vîrfurilor y_1 și y_2 printre vîrfurile ciclului C_2. În caz contrar G_2 nu conține nici un ciclu hamiltonian, deci G_2 se obține din K_{n-2}, prin suprimarea a cel puțin două muchii. Într-adevăr, dacă G_2 are vîrfurile $x_0, \ldots, x_{n-3}$ și singura

pereche de vîrfuri neadiacente din G_2 ar fi de exemplu $[x_0, x_1]$, putem obține un ciclu hamiltonian în G și anume:

$$[x_0, x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{n-3}, x_0]$$

pentru orice $n \geqslant 6$. Adăugînd grafului G_2 două muchii u_1 și u_2 între două perechi de vîrfuri neadiacente, obținem un graf G_3 cu $m_3 = m_2 + 2 \geqslant \binom{n-3}{2} + 2$ muchii, care conform ipotezei de inducție conține un ciclu hamiltonian C_3.

Dacă C_3 nu conține muchiile u_1 și u_2, am văzut că putem intercala vîrfurile y_1 și y_2, obținînd un ciclu hamiltonian C în graful G.

Dacă $C_3 = [x_0, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-3}, x_0]$ și $u_1 = [x_i, x_{i+1}]$ iar C_3 nu conține muchia u_2, obținem ciclul hamiltonian C pentru G:

$$C = [x_0, \ldots, x_i, y_1, y_2, x_{i+1}, \ldots, x_{n-3}, x_0].$$

O concluzie asemănătoare rezultă cînd C_3 conține pe u_2 și nu conține pe u_1. Dacă C_3 conține pe u_1 și pe u_2, fie $u_1 = [x_{i-1}, x_i]$ și $u_2 = [x_j, x_{j+1}]$ cu $i \leqslant j$, în acest caz definim:

$$C = [x_0, \ldots, x_{i-1}, y_1, x_i, \ldots, x_j, y_2, x_{j+1}, \ldots, x_{n-3}, x_0],$$

deci în toate cazurile G conține un ciclu hamiltonian.

Dacă $n = 4$ sau $n = 5$ vom arăta direct că în cazul b) G conține un ciclu hamiltonian. Am văzut că în acest caz există două vîrfuri y_1, y_2 avînd $d(y_1) = d(y_2) = 3$ pentru $n = 4$ și $d(y_1) = d(y_2) = 4$ pentru $n = 5$. Pentru $n = 5$ obținem $m \geqslant \binom{4}{2} + 2 = 8$, deci mai există cel puțin o muchie între vîrfurile x_1, x_2, x_3, de exemplu $[x_1, x_2]$. Am găsit astfel ciclurile hamiltoniene $[x_1, y_1, x_2, y_2, x_1]$, respectiv $[x_1, x_2, y_2, x_3, y_1, x_1]$ (fig. 11.4) și proprietatea este demonstrată prin inducție. Dacă considerăm graful complet K_{n-1} și un alt vîrf z diferit de vîrfurile lui K_{n-1}, legat printr-o muchie de un singur vîrf al lui K_{n-1}, graful obținut are $\binom{n-1}{2} + 1$ muchii și nu are cicluri hamiltoniene, deoarece $d(z) = 1$.

11.9. a) Fie $L = [x_0, x_1, \ldots, x_m]$ un cel mai lung lanț elementar al grafului G. Din maximalitatea lui L rezultă că toate vîrfurile adiacente cu x_0 aparțin lui L. Deoarece $d(x_0) \geqslant k$, va exista un vîrf x_i adiacent cu x_0, astfel încît $k \leqslant i \leqslant m$. Deci $C = [x_0, \ldots, x_i, x_0]$ este un ciclu elementar de lungime $i + 1 \geqslant k + 1$.

b) Fie L un cel mai lung lanț elementar al grafului G. Să presupunem mai întîi că există vîrfurile x_i și x_j astfel încît $i < j$, x_i este adiacent cu x_m și x_j este adiacent cu x_0. Presupunem de asemenea că $j - i$ este minimă în

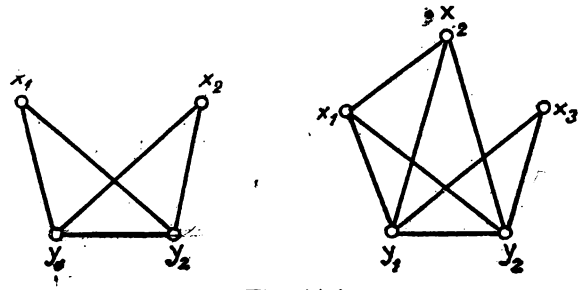


Fig. 11.4

mulțimea perechilor de indici cu aceste proprietăți. Notăm cu $C=[x_0, ..., x_i, x_m, x_{m-1}, ..., x_j, x_0]$ ciclul elementar care se formează în acest mod. Dacă $j = i + 1$, ciclul C are lungimea $m + 1$ și trebuie să fie un ciclu hamiltonian, deoarece în caz contrar există un vîrf care nu aparține lui C adiacent cu un vîrf al ciclului C. Dar în acest caz găsim un lanț elementar mai lung decît L, ceea ce contrazice maximalitatea lanțului L. Să studiem cazul cînd $j \geqslant i + 2$. Vîrfurile $x_{i+1}, ..., x_{j-1}$ nu sînt adiacente cu x_0 sau x_m, deci ciclul C conține ca și lanțul L vîrful x_m și toate vîrfurile adiacente cu x_m, deci $k + 1$ vîrfuri. Deoarece conform ipotezei $j \geqslant i + 2$, C mai conține cel puțin încă alte $k - 1$ vîrfuri și anume vîrfurile x_p cu proprietatea că x_{p+1} este adiacent cu x_0 și $x_p \neq x_{j-1}$. Toate aceste vîrfuri sînt distincte două cîte două, deci ciclul C conține cel puțin $2k$ vîrfuri.

Să studiem cazul rămas și anume cînd x_i este vîrful de indice maxim adiacent cu x_0, x_j este vîrful de indice minim adiacent cu x_m și $i \leqslant j$. Obținem astfel ciclurile elementare $C_1 = [x_0, ..., x_i, x_0]$ și $C_2 = [x_j, ..., x_m, x_j]$ care conțin toate vîrfurile adiacente cu x_0, respectiv toate vîrfurile adiacente cu x_m, din maximalitatea lanțului L. Deoarece graful G este 2-conex, există două lanțuri L_1, L_2 care nu au vîrfuri comune și care au fiecare o extremitate aparținînd ciclului C_1, iar cealaltă extremitate aparținînd ciclului C_2. De asemenea, putem presupune că unul din aceste lanțuri are o extremitate în vîrful x_i, deoarece în caz contrar vom considera un lanț elementar L_3 cu extremitățile în x_i și x_j. Deplasîndu-ne pe acest lanț de la x_i către x_j vom ajunge mai întîi fie la un vîrf aparținînd ciclului C_2, fie la un vîrf aparținînd lanțului $L_i (1 \leqslant i \leqslant 2)$.

În primul caz vom înlocui unul din lanțurile L_1 sau L_2 printr-un sublanț al lui L_3, iar în al doilea caz vom înlocui un sublanț al lui L_i prin sublanțul corespunzător al lui L_3, care începe în x_i.

Să presupunem acum că lanțul L_1 are o extremitate în x_i, iar L_2 nu are vîrfuri comune cu L_1. Dacă L_1 mai are o extremitate în x_j, ne oprim. În caz contrar, vom considera un lanț elementar L_3 cu extremitățile în x_i și x_j. Deplasîndu-ne pe L_3 de la x_j către x_i, să presupunem că întîlnim mai întîi un vîrf al lanțului L_2. Înlocuind în acest caz un sublanț al lui L_2 prin sublanțul corespunzător al lui L_3 care se termină în x_j, am găsit cele două lanțuri cu proprietățile cerute. Dacă întîlnim mai întîi un vîrf al ciclului C_1, vom considera în locul lui L_2 un sublanț al lanțului L_3 cuprins între x_j și prima intersecție a lui L_3 cu ciclul C_1, găsind iarăși cele două lanțuri cu proprietățile cerute. Dacă există un lanț L_i cu extremitățile x_i și x_j, sau există lanțuri diferite cu extremitățile în x_i și x_j, găsim în ambele cazuri un ciclu elementar care conține vîrfurile x_0, x_m și toate vîrfurile adiacente cu acestea (fig. 11.5).

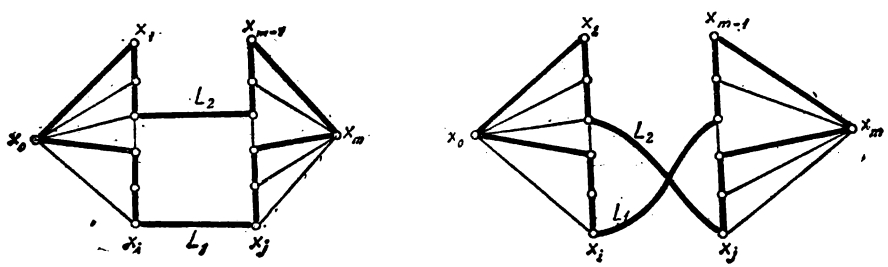


Fig. 11.5

Deoarece ciclurile C_1 și C_2 care conțin vîrfurile adiacente cu x_0, respectiv cu x_m au cel mult un vîrf comun (cînd $i = j$), rezultă că ciclul astfel format are o lungime mai mare sau egală cu $2k + 1$.
(G.A. Dirac, Proc. London Math. Soc., 2(1952), 69—81.)

11.10. Vom demonstra proprietatea prin inducție după n. Dacă $n \leqslant k$ avem $\frac{(n-1)k}{2} \geqslant \binom{n}{2}$, deci nu există nici un graf cu n vîrfuri și un număr de muchii mai mare decît K_n. Rezultă că afirmația din enunț este verificată.

Să presupunem acum $n > k$ și proprietatea adevărată pentru orice graf cu cel mult $n - 1$ vîrfuri. Dacă G este un graf cu n vîrfuri cu $m > \frac{(n-1)k}{2}$ muchii și G conține un vîrf x cu gradul mai mic sau egal cu $\frac{k}{2}$, subgraful G_x obținut prin suprimarea vîrfului x și a muchiilor incidente cu x are un număr de muchii superior lui $\frac{(n-1)k}{2} - \frac{k}{2} = \frac{(n-2)k}{2}$. Conform ipotezei de inducție subgraful G_x conține un ciclu elementar de lungime cel puțin egală cu $k + 1$.

Să studiem cazul rămas, cînd fiecare vîrf x al grafului G are gradul $d(x) \geqslant \frac{k+1}{2}$.

Dacă G este 2-conex, proprietatea b) din problema 11.9 ne conduce la existența unui ciclu elementar de lungime cel puțin egală cu $k + 1$. Dacă G nu este 2-conex, el admite cel puțin un punct de articulație z, deci există două subgrafuri G_1 și G_2 ale lui G cu mulțimile de vîrfuri X_1, X_2, astfel încît $X_1 \cap X_2 = \{z\}$ și care nu au muchii comune. Notînd cu m_1, m_2 numărul muchiilor lui G_1, respectiv G_2 obținem:

$$m_1 + m_2 > \frac{k(n-1)}{2} = \frac{k}{2}(|X_1| + |X_2| - 2),$$

deci există un indice i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, astfel încît:

$$m_i > \frac{k}{2}(|X_i| - 1).$$

Putem deci aplica ipoteza de inducție pentru subgraful G_i care conține mai puțin de n vîrfuri. Rezultă că G_i, deci și graful G conține un ciclu elementar de lungime mai mare sau egală cu $k + 1$.
(P. Erdös, T. Gallai, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10 (1959), 337—356.)

11.11. Să notăm cu $C = (x_1, \ldots, x_m, x_1)$ un cel mai lung circuit elementar al grafului G. Numărul de vîrfuri ale lui C verifică inegalitatea $m > \frac{n}{2}$. Într-adevăr, fie $Q = (z_0, \ldots, z_p)$ un cel mai lung drum elementar al lui G și $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$ vîrfurile lui G cu proprietatea că (z_{i_s}, z_0) este un arc. Din maximalitatea acestui drum rezultă că $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ aparțin drumului Q. Deoarece $d^-(z_0) \geqslant \frac{n}{2}$ obținem $i_k \geqslant k \geqslant \frac{n}{2}$ și deci circuitul $(z_0, z_1, \ldots, z_{i_k}, z_0)$ are o lungime mai mare ca $\frac{n}{2}$, ceea ce implică $m > \frac{n}{2}$. Să presupunem că circuitul C nu este hamiltonian și fie $D = (y_0, \ldots, y_r)$ un cel mai lung drum elementar în subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfurilor $x_1, \ldots, x_m$

ale circuitului C. Deoarece $d^-(y_0) \geq \frac{n}{2}$ obținem că există cel puțin $\frac{n}{2} - r$ arce de forma (u, y_0) unde $u \notin D$, deoarece există cel mult r arce de forma (u, y_0) cu $u \in D$.

Toate arcele de forma (u, y_0) cu $u \notin D$ au extremitatea inițială un vîrf din C. Să notăm aceste vîrfuri cu $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ cu $t \geq \frac{n}{2} - r$ și $i_1 < \ldots < i_t$.

În mod asemănător găsim vîrfurile $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$, $s \geq \frac{n}{2} - r$ astfel încît (y_r, x_{j_p}) să fie arce ale grafului G pentru $p = 1, \ldots, s$ și $j_1 < \ldots < j_s$. Dacă vîrfurile x_{i_p} și x_{j_q} sînt diferite, să observăm că drumul $(x_{i_p}, \ldots, x_{j_q})$ format cu arce ale circuitului C trebuie să aibă lungimea (numărul de arce) cel puțin egală cu $r + 2$. În caz contrar, putem obține un circuit C_1 de lungime strict mai mare decît C, ceea ce contrazice ipoteza, înlocuind drumul $(x_{i_p}, \ldots, x_{j_q})$ prin $(x_{i_p}, y_0, \ldots, y_r, x_{j_q})$ de lungime egală cu $r + 2$.

Deci dacă considerăm un drum elementar D_p format din arce ale circuitului C, care pleacă din x_{i_p+1} (luînd $x_{m+1} = x_1$) și avînd lungimea egală cu r pentru $s = 1, \ldots, t$, obținem următoarele situații:

a) $x_{j_q} = x_{i_p}$ și deci $x_{j_q} \notin V(D_p)$, unde prin $V(D_p)$ am notat mulțimea vîrfurilor drumului D_p. Într-adevăr, $r \leq n - m - 1 < \frac{n}{2} - 1$, iar lungimea circuitului C este $m > \frac{n}{2}$;

b) $x_{j_q} \neq x_{i_p}$ și deci $x_{j_q} \notin V(D_p)$, deoarece în caz contrar am obține că drumul $(x_{i_p}, \ldots, x_{j_q})$ are o lungime egală cu $r + 1$, însă am văzut că un astfel de subdrum al lui C are o lungime cel puțin egală cu $r + 2$.

Deci putem scrie:

$$x_{j_q} \notin \bigcup_{p=1}^{t} V(D_p) \text{ pentru } 1 \leq q \leq s. \tag{1}$$

Pe de altă parte obținem:

$$\left| \bigcup_{p=1}^{t} V(D_p) \right| \geq t + r, \tag{2}$$

deoarece reuniunea mulțimilor $V(D_p)$ conține vîrfurile distincte două cîte două: $x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_t+1}$. În plus, există două vîrfuri, fie x_{i_1} și x_{i_2}, astfel încît drumul $(x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2})$ format cu arce ale circuitului C să conțină un vîrf x_{j_q}. În acest caz am văzut că drumul D_1 de lungime r nu conține vîrful x_{j_q}, deci nici vîrful x_{i_1}. Obținem că cele r vîrfuri diferite de $x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_t+1}$ ale drumului D_1 aparțin reuniunii mulțimilor $V(D_p)$ după $p = 1, \ldots, t$ și (2) este justificată.

Din (1) și (2) găsim $s \leq m - (t + r)$ sau:

$$m \geq s + t + r \geq \frac{n}{2} - r + \frac{n}{2} - r + r = n - r. \tag{3}$$

Drumul D avînd $r + 1$ vîrfuri într-un subgraf cu $n - m$ vîrfuri, rezultă că:

$$r + 1 \leq n - m \text{ sau } m \leq n - r - 1 \tag{4}$$

Dar (3) și (4) sînt contradictorii, ceea ce arată că C este un circuit hamiltonian.

O problemă deschisă rămîne demonstrația faptului că în condițiile problemei de față și pentru $n \geqslant 5$ graful G conține cel puțin două circuite hamiltoniene fără arce comune.
(C.St.J.A. Nash — Williams, The many facets of graph theory, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 110 (1969), 237—243.)

11.12. Dacă graful-turneu G conține un circuit hamiltonian el este tare conex, deoarece oricare două vîrfuri ale unui circuit sînt unite printr-un drum. Să presupunem acum că G este tare conex. Deoarece între oricare două vîrfuri ale lui G, x și y există un drum de la x la y și un drum de la y la x, rezultă că G conține un circuit.

Fie $C=(y_1, \ldots, y_k, y_1)$ un circuit elementar cu un număr maxim de vîrfuri al lui G. Să presupunem prin reducere la absurd că C nu este un circuit hamiltonian. Fie x un vîrf care nu aparține lui C. Graful fiind complet, să presupunem că există arcul (y_1, x). Dacă există și arcul (x, y_2), atunci $(y_1, x, y_2, \ldots, y_k, y_1)$ este un circuit mai lung decît C, ceea ce contrazice ipoteza. Deci arcul dintre x și y_2 are forma (y_2, x). Din aproape în aproape găsim că există arcele (y_i, x) pentru $i = 1, \ldots, k$. Să notăm cu A mulțimea vîrfurilor x pentru care există arcul (y_1, x). Avem că (y_i, x) sînt arce pentru orice $x \in A$ și $i = 1, \ldots, k$. G fiind tare conex, există un arc (x, z) cu $x \in A$ și $z \notin A$. Rezultă că $z \notin C$ și deci G fiind complet și $z \notin A$ implică existența unui arc (z, y_1). Am obținut astfel un circuit $(x, z, y_1, \ldots, y_k, x)$ care conține mai multe vîrfuri decît C, ceea ce contrazice ipoteza. (P. Camion, C.R. Acad. Sci. Paris, 249 (1959), 2151—2152.)

12. PERMUTĂRI

12.1. Dacă permutarea p este un ciclu de lungime k, de exemplu $p = [i_1, \ldots, i_k]$, obținem $p(i_1) = i_2$, $p^2(i_1) = i_3, \ldots, p^{k-1}(i_1) = i_k$ și $p^k(i_1) = i_1$. Analog deducem că $p^k(j) = j$ pentru orice j, deci k este cel mai mic număr r astfel încît $p^r = e$, orice multiplu ks al lui k avînd proprietatea $p^{ks} = e$.

Deoarece ciclurile $p_1, \ldots, p_i$ din scrierea permutării p ca produs de cicluri fără elemente comune, $p = p_1 \ldots p_i$ comută între ele, rezultă că $p^r = p_1^r \ldots p_i^r$, deci dacă $p^r = e$ deducem că r este un multiplu comun al lungimilor ciclurilor permutării p.

12.2. Să notăm numărul permutărilor a n elemente care au k cicluri cu $p(n, k)$ și cu $c(n, k)$ coeficientul lui x^k din dezvoltarea lui $[x]^n$, adică:

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} c(n, k) x^k. \tag{1}$$

Se știe (problema 3.1) că

$$c(n, k) = |s(n, k)|,$$

deci mai trebuie demonstrat că $c(n, k) = p(n, k)$ pentru orice n și k.

Din expresia (1) obținem $c(n, 1) = (n-1)!$, iar $p(n, 1) = (n-1)!$, deoarece numărul permutărilor care au un singur ciclu (permutări circulare)

este egal cu $\frac{n!}{n}$, fiecare ciclu putînd fi scris în n moduri distincte, luînd ca prim element oricare din cele n elemente ale sale. Vom arăta că numerele $p(n, k)$ și $c(n, k)$ verifică aceeași relație de recurență.

Fie $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și $X_{n+1} = X_n \cup \{x_{n+1}\}$.

Orice permutare a mulțimii X_{n+1} cu k cicluri conține elementul x_{n+1} fie singur într-un ciclu, restul celor n elemente formînd o permutare cu $k - 1$ cicluri, fie împreună cu alte elemente într-un ciclu. Deoarece elementul x_{n+1} poate fi inserat într-un ciclu cu p elemente în exact p moduri distincte, rezultă recurența:

$$p(n + 1, k) = p(n, k - 1) + np(n, k). \tag{2}$$

Într-adevăr, toate permutările mulțimii X_{n+1} cu k cicluri se obțin fără repetiții fie adăugînd un nou ciclu format din x_{n+1} la permutările mulțimii X_n cu $k - 1$ cicluri, fie inserînd elementul x_{n+1} în n moduri în fiecare permutare a mulțimii X_n cu k cicluri.

Din (1) obținem:

$$[x]^{n+1} = [x]^n(x + n) \text{ sau:}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} c(n + 1, i)x^i = \left(\sum_{i=0}^{n} c(n, i)x^i\right)(x + n).$$

Egalînd coeficienții lui x^k în cei doi membri obținem recurența:

$$c(n + 1, k) = c(n, k - 1) + nc(n, k) \tag{3}$$

Relațiile (2) și (3) împreună cu valorile $c(n, 1) = p(n, 1) = (n - 1)!$ și $c(n, k) = p(n, k) = 0$ pentru $n < k$ determină în mod unic tabelul numerelor $c(n, k)$, respectiv $p(n, k)$. Obținem deci $p(n, k) = c(n, k) = |s(n, k)|$ pentru orice n și k, deoarece relațiile (2) și (3) în esență coincid.

12.3. Conform problemei 12.2, numărul permutărilor $p \in S_m$ care conțin k cicluri, este egal cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului $[x]^m = x(x + 1) \ldots (x + m - 1)$.

Acest lucru se mai scrie și sub forma:

$$\sum_{p \in S_m} x^{c(p)} = x(x + 1) \ldots (x + m - 1). \tag{1}$$

Substituind $x = n$ în (1) obținem prima relație.

Dacă substituim x prin $-x$ în (1), deducem:

$$\sum_{p \in S_m} (-1)^{c(p)}x^{c(p)} = (-1)^m x(x - 1) \ldots (x - m + 1). \tag{2}$$

Dacă permutarea p este de tipul $1^{c_1}2^{c_2} \ldots m^{c_m}$, unde $c_1 + 2c_2 + \ldots + mc_m = m$ și $c_i \geqslant 0$, vom arăta că $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{c_2+c_4+c_6+\cdots}$, deci paritatea lui p coincide cu a numărului său de cicluri pare.

Într-adevăr, dacă un ciclu $p = [i_1, i_2, \ldots, i_n]$ are n elemente, el se poate scrie ca un produs de $n - 1$ transpoziții, care sînt permutări impare, de exemplu sub forma:

$$p = [i_1, i_2][i_2, i_3] \ldots [i_{n-1}, i_n].$$

Dacă p este de tipul $1^{c_1}2^{c_2} \ldots m^{c_m}$, rezultă că ea se poate scrie ca un produs de $c_2 + 2c_3 + \ldots + (m - 1)c_m$ transpoziții, deci p are paritatea

sumei $c_2 + c_4 + c_6 + \ldots$. Deoarece $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + mc_m = m$, rezultă că $c(p) + m = 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 5c_4 + \ldots$, care are aceeași paritate cu $c_2 + c_4 + c_6 + \ldots$, deci $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{c(p)+m}$.

Înlocuind în (2) pe $(-1)^{c(p)}$ prin $(-1)^m \operatorname{sgn}(p)$ și făcînd $x = n$ se deduce:

$$\sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) n^{c(p)} = [n]_m,$$

deci a II-a egalitate este adevărată.
(A. Marcus, The American Math. Monthly, 9, 78(1971), 1028—1029.)

12.4. Să evaluăm numărul permutărilor a n elemente care au p cicluri conținînd fiecare $x_1, x_2, \ldots$, respectiv x_p elemente, ordinea ciclurilor fiind indusă de ordinea $1, \ldots, n$ a celor n elemente. Obținem deci $x_i \geqslant 1$ pentru $i = 1, \ldots, p$ și $x_1 + \ldots + x_p = n$. Deoarece fiecare ciclu cu x_i elemente poate fi scris în x_i moduri distincte, iar ciclurile, conținînd elemente diferite două cîte două pot fi permutate între ele, rezultînd o aceeași permutare a mulțimii celor n elemente, deducem că numărul căutat este:

$$\frac{n!}{p! x_1 x_2 \ldots x_p}.$$

Deci dacă însumăm aceste numere după toate scrierile lui n de forma:

$$n = x_1 + \ldots + x_p,$$

în care contează ordinea termenilor și $x_i \geqslant 1$ sînt numere întregi pentru $i = 1, \ldots, p$, găsim numărul tuturor permutărilor a n elemente care conțin p cicluri. Dar acest număr este egal cu $|s(n, p)|$ conform problemei 12.2, ceea ce demonstrează proprietatea cerută.

12.5. Elementul $n + 1$ poate fi inserat într-un ciclu de lungime p format cu elemente din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$ în p moduri distincte.

Astfel, $nd(n, k)$ numără permutările $p \in S_n$ fără puncte fixe, cu k cicluri, care conțin elementul $n + 1$ într-un ciclu de lungime $q \geqslant 3$, iar $nd(n - 1, k - 1)$ numără acele permutări care conțin elementul $n + 1$ într-un ciclu de lungime doi. Într-adevăr, elementul $n + 1$ poate forma un ciclu de lungime doi cu oricare din cele n elemente rămase, restul celor $n - 1$ elemente formînd o permutare a $n - 1$ elemente cu $k - 1$ cicluri, fără puncte fixe, de unde rezultă 1). Orice permutare a $2k$ elemente cu k cicluri și fără cicluri de lungime unu conține numai cicluri de lungime doi, deci este de tipul 2^k. Rezultă

$$d(2k, k) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k - 1).$$

Pentru a demonstra 3), ținem seama că numărul permutărilor $p \in S_n$ cu k cicluri este egal cu $c(n, k) = |s(n, k)| = (-1)^{n+k} s(n, k)$, unde $s(n, k)$ este numărul lui Stirling de prima speță. (Problema 12.2).

Să notăm cu A_i mulțimea permutărilor $p \in S_n$ pentru care $p(i) = i$ și care au k cicluri. Rezultă că:

$$d(n, k) = c(n, k) - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

$$= c(n, k) - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \ldots$$

aplicînd principiul includerii și al excluderii.

Dar $\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|$ conține $\binom{n}{j}$ termeni, toți fiind egali cu $c(n-j, k-j)$, deoarece $p \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ implică $p(i_1) = i_1, \ldots, p(i_j) = i_j$, restricția permutării p la elementele rămase fiind o permutare a $n-j$ elemente cu $k-j$ cicluri.
(P. Appell, Arch. Math. Phys., 65(1880), 171—175 și J. Kaucký, Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied, 21(1971), 82—86.)

12.6. Relația de conjugare este o echivalență, deoarece ea este:
— reflexivă: $s = ese^{-1}$ unde e este permutarea identică;
— simetrică: $s = gtg^{-1}$ implică $t = g^{-1}sg = hsh^{-1}$, unde $h = g^{-1} \in S_n$;
— tranzitivă: $s = gtg^{-1}$ și $t = huh^{-1}$ implică
$s = ghuh^{-1}g^{-1} = (gh)u(gh)^{-1}$, unde permutarea $gh \in S_n$.
Pentru a demonstra necesitatea condiției de la 2) să presupunem că permutările s și t sînt conjugate, adică există $g \in S_n$ astfel încît $s = gtg^{-1}$. Să scriem descompunerea permutării t ca produs de cicluri disjuncte sub forma următoare:

$$t = [t_{11}t_{12} \ldots t_{1i}][t_{21}t_{22} \ldots t_{2j}] \ldots [t_{m1}t_{m2} \ldots t_{mk}]$$

și să notăm $g(t_{pq}) = s_{pq}$.
Egalitatea $s = gtg^{-1}$ implică
$s(s_{11}) = gtg^{-1}(s_{11}) = gt(t_{11}) = g(t_{12}) = s_{12}, \ldots$ deci descompunerea permutării s în produs de cicluri este:

$$s = [s_{11}s_{12} \ldots s_{1i}][s_{21}s_{22} \ldots s_{2j}] \ldots [s_{m1}s_{m2} \ldots s_{mk}].$$

Rezultă că două permutări conjugate se descompun în același număr de cicluri avînd respectiv aceleași lungimi.
Pentru a demonstra suficiența condiției, să definim permutarea g plecînd de la descompunerile în cicluri ale permutărilor s și t în modul următor: $g(t_{pq}) = s_{pq}$.
Deoarece ambele descompuneri ale lui s și t sub formă de produs de cicluri fără elemente comune, conțin fiecare din numerele $1, \ldots, n$ o dată și numai o dată, rezultă că $g \in S_n$ și un calcul analog cu cel dinainte ne arată că $s = gtg^{-1}$. Cu aceasta suficiența condiției este demonstrată.
Pentru a demonstra formula lui Cauchy, să scriem o permutare f care are λ_1 cicluri de lungime 1, ..., λ_k cicluri de lungime k, sub formă de produs de cicluri cu ciclurile scrise în ordinea crescătoare a lungimilor lor:

$$f = \underbrace{[*] \ldots [*]}_{\lambda_1} \underbrace{[**] \ldots [**]}_{\lambda_2} \ldots \underbrace{\ldots \overbrace{[* \ldots **]}^{k}}_{\lambda_k}$$

unde steluțele reprezintă numerele $1, \ldots, n$.
Suprimînd parantezele, obținem o permutare $a_1a_2, \ldots, a_n$ a numerelor din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$.
Numărul acestor permutări este $n!$, însă o aceeași permutare f generează $\lambda_1! \ldots \lambda_k!\, 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2} \ldots k^{\lambda_k}$ permutări diferite ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$.
Într-adevăr, putem permuta cele λ_i cicluri de lungime i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ în scrierea permutării f ca produs de cicluri în $\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_k!$ moduri distincte. Pe de altă parte, orice ciclu de lungime i poate fi scris în i moduri distincte, luînd ca prim element al său oricare din cele i elemente, obținînd deci $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots k^{\lambda_k}$ posibilități de scriere. Se justifică ușor că plecînd de la toate cele

$h(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ permutări care conțin λ_1 cicluri cu un element, ..., λ_k cicluri cu k elemente, prin scrierea fiecărui ciclu de lungime i în i moduri distincte și prin permutarea între ele în toate modurile posibile a ciclurilor care conțin același număr de elemente, se obțin fără repetiții cele $n!$ permutări ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$. Rezultă că

$$h(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\lambda_1! \ldots \lambda_k!\, 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots k^{\lambda_k} = n!,$$

de unde se deduce formula lui Cauchy.

O clasă de echivalență este caracterizată de numărul ciclurilor și de lungimile lor $n_1, \ldots, n_k$, care verifică $n_1 + \ldots + n_k = n$. Putem presupune că $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$, deoarece ordinea ciclurilor în produsul de cicluri nu are importanță, produsul fiind comutativ. Deci numărul de clase de echivalență este tocmai numărul partițiilor întregului n, număr notat cu $P(n)$.

12.7. Identitatea lui Cauchy se deduce din relația $\sum_{\substack{c_1+2c_2+\ldots+nc_n=n \\ c_i \geqslant 0}} h(c_1, c_2, \ldots, c_n) = n!$, ținînd seama de problema 8.6 sau de punctul 3) de la problema precedentă.

12.8. Vom calcula numărul permutărilor pentru care numărul 1 este conținut într-un ciclu de lungime k. Elementele acestui ciclu pot fi alese în $\binom{n-1}{k-1}$ moduri distincte, deoarece scoțînd elementul 1 mai rămîn $k-1$ elemente care aparțin mulțimii $\{2, \ldots, n\}$ de cardinal $n-1$.

Cu cele k elemente putem forma $(k-1)!$ cicluri distincte cu k elemente, iar pentru cele $n-k$ elemente rămase există $(n-k)!$ permutări distincte. Obținem numărul permutărilor care conțin pe 1 într-un ciclu cu k elemente egal cu:

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\,(n-k)! = (n-1)!.$$

Probabilitatea căutată este deci $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ și nu depinde de k.

12.9. Vom număra permutările în care 1 și 2 aparțin unor cicluri diferite. Dacă ciclul care îl conține pe 1 are lungimea k, putem alege celelalte $k-1$ elemente în

$$\binom{n-2}{k-1}$$

moduri diferite din mulțimea $\{3, \ldots, n\}$.

Există $(k-1)!$ permutări circulare ale acestor k elemente și $(n-k)!$ permutări ale celor $n-k$ elemente rămase. Numărul de permutări pentru care 1 și 2 aparțin unor cicluri diferite, este egal cu

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}(k-1)!\,(n-k)! = (n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) =$$

$$= (n-2)!\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2},$$ deci probabilitatea căutată este $\frac{1}{2}$.

12.10. Pentru orice $1 \leqslant k \leqslant n$ vom defini numerele $p_i(n)$ fiind egale cu numărul permutărilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care conțin elementul i într-un ciclu de lungime k. În acest caz suma $p_1(n) + \ldots + p_n(n)$ va reprezenta suma

numerelor elementelor care sînt conținute în cicluri de lungime k în toate cele $n!$ permutări ale mulțimii $\{1, ..., n\}$. Deci

$$C_k = \frac{1}{k}(p_1(n) + \ldots + p_n(n))$$

reprezintă numărul tuturor ciclurilor de lungime k în cele $n!$ permutări. Numărul mediu de cicluri de lungime k ale unei permutări a mulțimii $\{1, ..., n\}$ este egal cu $\frac{1}{n!}C_k = \frac{1}{k}$, deoarece conform problemei 12.8 există relația: $\frac{p_i(n)}{n!} = \frac{1}{n}$ pentru orice $i = 1, ..., n$.

Rezultă că numărul mediu de cicluri ale unei permutări a mulțimii $\{1, ..., n\}$ este egal cu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \cong \ln n,$$

deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma = 0{,}5772\ldots$ (constanta lui Euler).

12.11. Deoarece $p^2 = e$, rezultă că permutarea p are toate ciclurile de lungime egală cu 1 sau cu 2. Rezultă că mulțimea permutărilor $p \in S_n$ astfel încît $p^2 = e$ se scrie sub forma $A_n \cup B_n$, unde A_n este mulțimea permutărilor $p \in S_n$ cu $p^2 = e$ care verifică $p(n) = n$, iar B_n este mulțimea permutărilor $p \in S_n$ pentru care $p^2 = e$ și elementul n face parte dintr-un ciclu de lungime 2 al lui p. Rezultă $P_n = |A_n| + |B_n| = P_{n-1} + (n-1)P_{n-2}$, deoarece dacă $p(n) = n$, celelalte $n-1$ elemente formează o permutare $q \in S_{n-1}$ pentru care $q^2 = e$, iar dacă $p \in B_n$ elementul n poate forma un ciclu de lungime 2 cu oricare din celelalte $n-1$ elemente, restul elementelor formînd o permutare $r \in S_{n-2}$ pentru care $r^2 = e$.

Relația 2) se obține dacă notăm cu i numărul ciclurilor de lungime 1 (puncte fixe) ale permutării p și cu j numărul ciclurilor de lungime 2 ale lui p, deci:

$$P_n = \text{Perm}\ (1^i 2^j;\ n) = n! \sum (i!\,j!\,2^j)^{-1},$$

unde suma se face după toate scrierile lui n de forma $i + 2j = n$ cu $i, j \geqslant 0$.

Funcția generatoare exponențială a numerelor P_n este:

$$\sum_{n\geqslant 0} P_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!\,j!\,2^j}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{t^i}{i!}\frac{(t^2/2)^j}{j!} = e^t \cdot e^{t^2/2} = \exp(t + t^2/2).$$

Dacă $P_n(m)$ este numărul permutărilor $p \in S_n$ pentru care $p^m = e$, se cunoaște că:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(m)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(\sum_{k|m} \frac{t^k}{k}\right).$$

(E. Jacobstahl, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim), 21(1949), 49—51 și S.D. Chowla, I.N. Herstein, W.R. Scott, Ibid., 25(1952), 29—31.)

12.12. Să presupunem că permutarea $p \in S_n$ admite următoarea scriere ca produs de transpoziții: $p = t_1 t_2 \ldots t_r$, deci $pt_r t_{r-1} \ldots t_1 = e$, permutarea identică din S_n.

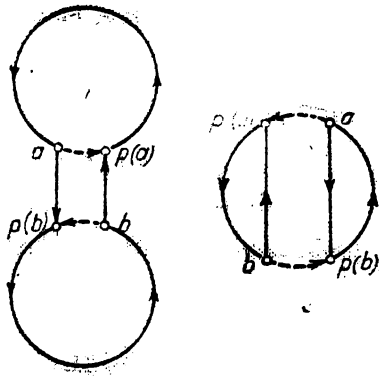


Fig. 12.1

Oricărei permutări p i se poate asocia un graf orientat G_p, cu mulțimea vîrfurilor $\{1, \ldots, n\}$, ale cărui componente conexe sînt circuite elementare care corespund ciclurilor permutării p, astfel încît există arcul (i, j) dacă și numai dacă $j = p(i)$. Să vedem ce se întîmplă cu acest graf cînd permutarea p se înmulțește cu o transpoziție $[a, b]$, deci $q = p[a, b]$.

Deoarece transpoziția $[a, b]$ îl duce pe a în b și pe b în a, rezultă că graful G_q se obține din G_p înlocuind arcele $(a, p(a))$ și $(b, p(b))$ prin arcele $(a, p(b))$ și respectiv $(b, p(a))$.

Dacă a și b se găsesc în două circuite diferite ale grafului G_p, aceste două circuite vor genera un singur circuit în graful G_q, în timp ce dacă a și b aparțin unui aceluiași circuit din G_p, atunci acest circuit se descompune în două circuite fără vîrfuri comune în graful G_q, așa cum este reprezentat în figura 12.1.

Graful permutării identice $e \in S_n$ constă din n circuite de lungime unu, iar prin înmulțirea unei permutări p cu o transpoziție t obținem $c(pt) \leqslant c(p) + 1$. Rezultă deci că numărul r de transpoziții din scrierea lui p ca produs de transpoziții verifică inegalitatea:

$$n = c(e) \leqslant c(p) + r, \text{ sau } r \geqslant n - c(p).$$

Numărul $n - c(p)$ de transpoziții poate fi atins, deoarece orice ciclu de lungime m poate fi scris ca produs de $m - 1$ transpoziții:

$$[i_1, i_2, \ldots, i_m] = [i_1, i_2]\,[i_2, i_3] \ldots [i_{m-1}, i_m],$$

deci dacă permutarea $p \neq e$ este de tipul $1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$, ea se poate scrie ca produs de $\sum_{i=1}^{n} c_i(i-1) = n - c(p)$ transpoziții, deoarece $c_1 + 2c_2 + \ldots + nc_n = n$.

12.13. Pentru a demonstra necesitatea condiției, să presupunem că graful (X, T) este conex. Deoarece acest graf are n vîrfuri și $n - 1$ muchii, rezultă că el este arbore. Într-adevăr, dacă ar conține un ciclu, putem suprima o muchie oarecare a ciclului obținînd un graf conex. Repetînd acest procedeu ajungem la un arbore cu n vîrfuri și $n - 1$ muchii, ceea ce contrazice ipoteza că (X, T) are $n - 1$ muchii. Dacă (X, T) nu este conex, rezultă că există două vîrfuri ale grafului, fie a și b care aparțin unor componente conexe diferite. Deoarece f este permutare circulară, rezultă că există un număr $r \leqslant n - 1$ astfel ca $f^r(a) = b$. Pe de altă parte, permutarea f fiind un produs de transpoziții din T, transformă fiecare vîrf din X într-un vîrf din aceeași componentă conexă cu el, deci și permutarea f^r are aceeași proprietate, ceea ce implică $f^r(a) \neq b$. Deci (X, T) este conex, adică este arbore.

Pentru a demonstra suficiența condiției, să pesupunem că (X, T) este arbore. Vom considera șirul de permutări $g_1 = t_1$, $g_2 = g_1 t_2$, $g_3 = g_2 t_3$, ..., $g_{n-1} = f$.

Vom arăta că cele două elemente i și j care formează transpoziția $t_q = [i, j]$ nu se găsesc pe un același circuit din graful permutării $t_1 t_2 \dots t_{q-1}$ pentru $q = 2, \dots, n-1$, graf definit ca la rezolvarea problemei 12.12.

Dacă i și j ar aparține unui aceluiași circuit din graful permutării $t_1 t_2 \dots t_{q-1}$, aceasta ar implica că în acest șir de transpoziții există transpoziții de forma $[i, i_1], [i_1, i_2], \dots, [i_k, j]$ unde $k \geqslant 1$, care corespund unui drum de la i la j. Dar în acest caz graful neorientat (X, T) conține muchiile $[i, i_1], \dots, [i_k, j]$ și $t_q = [i, j]$, deci conține un ciclu, ceea ce contrazice ipoteza că el este un arbore.

Deoarece i și j nu aparțin unui aceluiași circuit în graful permutării $g_{q-1} = t_1 t_2 \dots t_{q-1}$, rezultă că graful permutării $g_q = g_{q-1} t_q$ se obține din graful permutării g_{q-1} prin unificarea celor două circuite care conțin respectiv vîrfurile i și j, deci numărul componentelor sale conexe este $c(G_{g_q}) = c(G_{g_{q-1}}) - 1$. Dar $c(G_{g_1}) = n - 1$, deoarece graful G_{g_1} este format dintr-un circuit cu două vîrfuri și $n - 2$ circuite care conțin fiecare cîte un singur vîrf, deci $c(G_{g_2}) = n - 2$, $c(G_{g_3}) = n - 3$, ..., $c(G_f) = 1$. Deoarece G_f este conex, avînd o singură componentă conexă, el se reduce la un circuit cu n vîrfuri, deci f este o permutare circulară.

Vom nota numărul de posibilități de scriere a unei permutări circulare f ca un produs de $n - 1$ transpoziții prin $A(f)$. Deci numărul de produse a $n - 1$ transpoziții care generează toate cele $(n-1)!$ permutări circulare a n elemente este egal cu $(n-1)!A(f)$, deoarece evident numărul $A(f)$ nu depinde de permutarea circulară f, ci este o funcție de n.

Ținînd seama de rezultatul precedent, obținem că singurele produse $t_1 t_2 \dots t_{n-1}$ formate din $n - 1$ transpoziții care generează o permutare circulară a n elemente, sînt acelea pentru care graful (X, T) este un arbore. Deci produsele a $n - 1$ transpoziții care generează toate permutările circulare a n elemente pot fi obținute în modul următor:

Pentru fiecare arbore cu vîrfurile etichetate cu numerele $1, \dots, n$ fie (X, T), se formează produsul $t_1 t_2 \dots t_{n-1}$ de transpoziții asociate muchiilor sale și apoi se permută în $(n-1)!$ moduri distincte transpozițiile $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, obținînd astfel produse distincte care generează permutări circulare.

Dar numărul arborilor cu n vîrfuri etichetate este egal cu n^{n-2}, conform formulei lui Cayley (problema 6.15). Doi astfel de arbori, care conțin cel puțin două muchii diferite în cei doi arbori, vor genera produse distincte de transpoziții. Deci $(n-1)!A(f) = (n-1)!n^{n-2}$, de unde $A(f) = n^{n-2}$, adică numărul modurilor în care o permutare circulară a n elemente poate fi scrisă ca un produs de $n - 1$ transpoziții este egal cu numărul arborilor cu n vîrfuri etichetate.

(J. Dénes, Magyar Tud.Akad. Mat.Kutató Int.Közl., 4(1959), 63—71.)

12.14. Pentru a arăta 1), să observăm că dacă $p_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ este o permutare din S_n și notăm $p_2 = a_n a_{n-1} \dots a_1$, atunci $I(p_1) + I(p_2) = \binom{n}{2}$.

Într-adevăr dacă $i < j$, pentru exact o valoare a indicelui k avem $p_k(i) > p_k(j)$ $(1 \leqslant k \leqslant 2)$ și deci numărul de inversiuni din p_1 și din p_2 este egal cu numărul de perechi (i, j) cu $i < j$, adică cu $\binom{n}{2}$.

Rezultă că putem grupa permutările din S_n două cîte două, astfel încît să aibă împreună $\binom{n}{2}$ inversiuni. S_n conține $n!$ permutări, deci numărul de astfel de perechi fiind egal cu $\frac{1}{2}\, n!$, obținem 1).

Dacă notăm $I(p_1) = k$ obținem $I(p_2) = \binom{n}{2} - k$.

Corespondența astfel definită de la permutările din S_n cu k inversiuni la permutările din S_n cu $\binom{n}{2} - k$ inversiuni este injectivă și surjectivă, deci o bijecție, de unde rezultă 2). Recurența 3) va fi o consecință a recurenței 4). Pentru a demonstra 4), să observăm că are loc egalitatea:

$$p(n+1, k) = \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|, \tag{1}$$

unde

$$A_i = \{p \mid p \in S_{n+1},\ I(p) = k \text{ și } p(i) = n+1\}.$$

Dacă elementul $n+1$ se găsește pe poziția i, el va prezenta inversiuni cu toate cele $n+1-i$ elemente care se găsesc pe pozițiile $i+1, \ldots, n+1$.

Deci dacă $p \in A_i$, prin suprimarea elementului $n+1$ de pe poziția i se obține o permutare $p_i \in S_n$ astfel încît $I(p_i) = k - n + i - 1$.

Corespondența astfel definită care asociază permutării $p \in A_i$ permutarea $p_i \in S_n$ fiind o bijecție între mulțimea A_i și mulțimea permutărilor din S_n cu $k - n + i - 1$ inversiuni, rezultă:

$$|A_i| = p(n,\ k - n + i - 1).$$

Ținînd seama de recurența (1) rezultă (4).

Deoarece orice permutare din S_n are cel mult $\binom{n}{2}$ inversiuni, acest număr maxim de inversiuni fiind atins numai pentru permutarea $n, n-1, \ldots, 1$, rezultă că $p\left(n, \binom{n}{2}\right) = 1$ și $p(n, i) = 0$ pentru $i > \binom{n}{2}$. Singura permutare cu zero inversiuni fiind permutarea identică $1, 2, \ldots, n$ mai rezultă $p(n, 0) = 1$.

Aceste valori inițiale împreună cu recurența 4) ne permit determinarea matricei numerelor $p(n, k)$ linie cu linie.

Pentru a arăta 3) să observăm că dacă avem $k < n$, obținem pe baza recurenței 4):

$$p(n, k) = p(n-1, k) + p(n-1, k-1) + \ldots + p(n-1, 0);$$

$$p(n, k-1) = p(n-1, k-1) + p(n-1, k-2) + \ldots + p(n-1, 0),$$

de unde se deduce $p(n, k) = p(n-1, k) + p(n, k-1)$.

5) Să notăm:

$$(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+\ldots+x^{n-1}) = \sum_{k \geq 0} c(n, k) x^k.$$

Termenul de grad maxim este $x^{1+2+\ldots+(n-1)} = x^{\binom{n}{2}}$, deci $c\left(n, \binom{n}{2}\right) = 1$ și $c(n, k) = 0$ pentru $k > \binom{n}{2}$.

Termenul liber este 1, deci $c(n, 0) = 1$.
Pentru a găsi recurența verificată de numerele $c(n, k)$ să scriem:

$$\sum_{k\geqslant 0} c(n+1, k)x^k = (1+x)\ldots(1+x\ldots+x^n) = \left(\sum_{i\geqslant 0} c(n, i)x^i\right)(1+ \\ + x + \ldots + x^n).$$

Egalînd coeficienții lui x^k din cei doi membri găsim:

$c(n+1, k) = c(n, k) + c(n, k-1) + \ldots + c(n, k-n)$, unde $c(n, i) = 0$ pentru $i < 0$.

Deoarece numerele $c(n, k)$ și $p(n, k)$ au aceleași valori inițiale și verifică aceeași recurență care le determină în mod unic, rezultă că $c(n, k) = p(n, k)$ pentru orice n și k, ceea ce demonstrează egalitatea 5).

12.15. Fiind dată o permutare $p \in S_n$, să o scriem ca produs de cicluri fără elemente comune, scriind și ciclurile de lungime unu (punctele fixe ale lui p), astfel încît fiecare ciclu să înceapă cu cel mai mare element al său și aceste cele mai mari elemente ale ciclurilor să fie în ordine crescătoare.

De exemplu, permutarea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$ va fi scrisă sub forma:

$$p = [4, 2]\,[5, 1, 3]\,[7, 6].$$

În acest mod ultimul ciclu va începe mereu cu elementul n. Șirul de numere obținut în acest mod poate fi privit ca o altă permutare $f(p)$.
Pentru exemplul dat, obținem:

$$f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Permutarea p poate fi reconstituită în mod unic plecînd de la permutarea $f(p) \in S_n$: Ultimul ciclu al permutării p începe cu numărul n, penultimul ciclu începe cu cel mai mare număr care nu este conținut în ultimul ciclu ș.a.m.d.

Dacă permutarea p conține k cicluri, permutarea $p_1 = f(p)$ va conține exact k elemente j pentru care $p_1(j) > p_1(i)$ pentru orice $i < j$ și anume primele elemente din cele k cicluri ale permutării p.

Deoarece permutarea p cu k cicluri poate fi reconstituită în mod unic plecînd de la permutarea $p_1 = f(p)$ care conține k elemente j pentru care $p_1(j) > p_1(i)$ pentru orice $i < j$, rezultă că f este o bijecție între mulțimea permutărilor $p \in S_n$ cu k cicluri și mulțimea permutărilor $p_1 \in S_n$ care au proprietatea din enunțul problemei.

Dar numărul permutărilor $p \in S_n$ cu k cicluri este egal cu $|s(n, k)|$ conform problemei 12.2, ceea ce încheie demonstrația.
(A. Rényi, Colloquium Aarhus (1962), 104—117.)

12.16. Este clar că $d(f, g) = 0$ implică $f(i) = g(i)$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$, deci $f = g$ și $d(f, g) \geqslant 0$ pentru orice $f, g \in S_n$. Mai obținem $d(f, g) = d(g, f)$ și pentru $f, g, h \in S_n$ putem scrie:

$$|f(i) - g(i)| \leqslant |f(i) - h(i)| + |h(i) - g(i)|$$

pentru orice $i = 1, \ldots, n$, ceea ce implică:

$$\max_i |f(i) - g(i)| \leqslant \max_i (|f(i) - h(i)| + |h(i) - g(i)|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_i |f(i) - h(i)| + \max_i |h(i) - g(i)|, \text{ adică } d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g).$$

Deci $d(f, g)$ este o metrică sau o distanță pe S_n. Dacă $p \in S_n$ și $d(e_n, p) \leqslant 1$, unde e_n este permutarea identică din S_n, rezultă că sau $p(n) = n$ sau $p(n) = n - 1$ și $p(n - 1) = n$, deoarece în caz contrar am avea $d(e, p) \geqslant 2$.

Notînd cu q, respectiv r restricțiile permutării p la primele $n - 1$, respectiv $n - 2$ elemente din $\{1, \ldots, n\}$, deducem în primul caz $d(e_{n-1}, q) \leqslant 1$ și în cel de al II-lea caz $d(e_{n-2}, r) \leqslant 1$.

Deci $F(n, 1) = F(n - 1, 1) + F(n - 2, 1)$, care împreună cu valorile $F(1, 1) = 1$ și $F(2, 1) = 2$, ne conduc la egalitatea $F(n, 1) = F_n$ pentru orice $n \geqslant 1$.

12.17. Definind permanentul unei matrice pătrate $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ prin egalitatea:

$$\text{per } A = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \ldots a_{np(n)},$$

unde p parcurge mulțimea permutărilor lui $\{1, \ldots, n\}$, se observă că:

$$a_n = \text{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & & 1 \\ & & & & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

În această matrice de ordinul n numărul elementelor 1 în ordinea crescătoare a indicilor de linie este respectiv 3, 4, 5, 5, ..., 5, 4, 3, restul elementelor fiind 0. În suma care definește permanentul acestei matrice numai produsele corespunzînd permutărilor p care verifică $|p(i) - i| \leqslant 2$ pentru $i = 1, \ldots, n$ au valoarea 1, restul fiind nule, ceea ce justifică egalitatea scrisă.

Din proprietățile permutărilor se deduce că permanentul se poate dezvolta după elementele unei linii sau unei coloane, în mod analog cu determinanții, cu singura deosebire că toți permanenții din dezvoltare apar cu semnul plus.

Dezvoltînd acest permanent după elementele primei linii se obține:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1},$$

unde am notat:

$$b_n = \text{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_n = \text{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dezvoltînd pe b_n și c_n după primele lor coloane, găsim:

$$b_n = a_{n-1} \oplus b_{n-1};$$

$$c_n = b_{n-1} \oplus d_{n-1},$$

unde

$$d_n = \operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar toate matricele scrise au ordinul n.

Dezvoltîndu-l și pe d_n găsim:

$$d_n = a_{n-1} + e_{n-1},$$

unde:

$$e_n = \operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dezvoltîndu-l pe e_n după prima coloană găsim că $e_n = a_{n-1}$. Aceste relații de recurență permit obținerea lui a_n, b_n, c_n, d_n, e_n pentru orice n, plecînd de la $n = 2$ și $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 2$; $e_2 = 1$. Să notăm:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Relațiile de recurență scrise se transpun în formă matriceală astfel:

$$v_n = Av_{n-1} = A^2 v_{n-2} = \ldots = A^{n-1} v_1 = A^n v_0,$$

dacă se notează:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = Av_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se obține în continuare:

$$v_2 = Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

care coincid cu valorile deduse direct pentru cazul $n = 2$. Deci a_n se obține ca produsul scalar al vectorului format din prima linie a matricei A^n cu vectorul v_0, adică este $(A^n)_{11}$.
(D.H. Lehmer, în: Comb. Theory Appl., Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 4, North-Holland (1970), 755—770.)

12.18. Numărul căutat este permanentul matricei:

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & 00 \ldots 00 \\ 1 \ldots 1 & 10 \ldots 00 \\ \vdots & \\ 1 \ldots 1 & 11 \ldots 10 \\ 1 \ldots 1 & 11 \ldots 11 \\ \vdots & \\ 1 \ldots 1 & 11 \ldots 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n-p \\ \\ \\ \\ \} p \\ \\ \end{matrix}$$
$$\underbrace{\qquad}_{p} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-p}$$

Dezvoltînd permanentul după prima linie a matricei, găsim relația de recurență:

$$A(n, p) = pA(n-1, p).$$

Deci $A(n, p) = pA(n-1, p) = \ldots p^{n-p}A(p, p) = p^{n-p}p!$, deoarece $A(p, p)$ este numărul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, p\}$, adică $p!$.

12.19. Pentru o permutare sus-jos a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ numărul 1 se poate găsi pe una din pozițiile de rang 1, 3, 5, ..., iar numărul n se poate găsi pe una dintre pozițiile de rang 2, 4, 6, ...
Dacă numărul 1 se găsește pe poziția $2k+1$, numărul permutărilor sus-jos ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ cu această proprietate este egal cu $\binom{n-1}{2k} A_{2k}A_{n-1-2k}$, deoarece numerele de pe pozițiile 1, 2, ..., $2k$ pot fi alese în $\binom{n-1}{2k}$ moduri dintre 2, 3, ..., n, iar numărul permutărilor sus-jos cu $2k$ poziții este A_{2k}, în timp ce numărul permutărilor sus-jos formate pe pozițiile $2k+2, \ldots, n$ cu numerele rămase este egal cu A_{n-1-2k}. Dacă numărul n se găsește pe poziția de rang $2k$, obținem în mod analog un număr de permutări sus-jos ale mulțimii date egal cu $\binom{n-1}{2k-1} A_{2k-1}A_{n-2k}$, deci obținem recurența:

$$2A_n = \binom{n-1}{0} A_0A_{n-1} + \binom{n-1}{1} A_1A_{n-2} + \binom{n-1}{2} A_2A_{n-3} + \ldots +$$
$$+ \binom{n-1}{n-1} A_{n-1}A_0, \text{ unde } A_0 = A_1 = 1;$$

deoarece fiecare permutare sus-jos cu numărul 1 pe poziția $2i+1$ și numărul n pe poziția $2j$ este numărată astfel exact de două ori: o dată printre permutările sus-jos cu numărul 1 pe poziția $2i+1$ și o dată printre permutările

sus-jos cu numărul n pe poziția $2j$. Notînd $a_k = \frac{A_k}{k!}$ pentru $k \geqslant 0$, această recurență se scrie:

$$2na_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0,$$

deci funcția generatoare a numerelor a_i:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

satisface ecuația diferențială $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \frac{1}{2}$, cu condiția inițială $f(0) = a_0 = 1$.

Rezolvînd această ecuație deducem

$$\operatorname{arctg} f = \frac{x}{2} + C \text{ sau } f = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + C\right),$$

unde $C = \frac{\pi}{4}$, deci $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin x}{\cos x} = \sec x + \operatorname{tg} x$.

(D. André, C.R. Acad. Sci. Paris, 88(1879), 965—967.)

Există numeroase extensii ale acestui rezultat clasic.

(L. Carlitz, Discrete Mathematics, 4(1973), 273—286; L. Carlitz, R. Scoville, Duke Mathematical J., 4(39), 152(1972), 583—598, etc..)

12.20. Din condițiile date se deduce că $p(1) < p(3) < p(5) < p(7) < \ldots$ și $p(1) < p(4) < p(6) < p(8) < \ldots$, deci rezultă că $p(1) < \min(p(3), p(4), p(5), p(6), \ldots)$.

În mod analog deducem că $p(i) < \min\limits_{j \geqslant i+2} p(j)$.

Să notăm numărul căutat cu $g(n)$ pentru orice $n \geqslant 1$. Obținem $g(1) = 1$ și $g(2) = 2$, deoarece ambele permutări 1, 2 și 2, 1 verifică condițiile impuse. Mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care sînt 2-ordonate și 3-ordonate se poate scrie sub forma $A_n \cup B_n$, unde A_n este mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care sînt 2-ordonate și 3-ordonate și pentru care $p(1) = 1$, iar B_n este mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care sînt 2-ordonate și 3-ordonate și pentru care $p(1) = 2$ și $p(2) = 1$.

Într-adevăr, dacă permutarea p este 2-ordonată și 3-ordonată și $p(1) = 2$, rezultă că $p(2) = 1$, deoarece în caz contrar numărul 1 apare pe una din pozițiile 3, 4, ..., n, deci este contrazisă inegalitatea:

$$p(1) < \min(p(3), p(4), \ldots, p(n)). \tag{1}$$

Din același motiv rezultă $p(1) \leqslant 2$, deoarece dacă $p(1) \geqslant 3$, măcar unul dintre numerele 1 sau 2 apare pe una dintre pozițiile 3, 4, ..., n și este iarăși contrazisă (1).

Este clar că mulțimile A_n și B_n sînt disjuncte, deci $g(n) = |A_n| + |B_n| = g(n-1) + g(n-2)$, deoarece A_n are același cardinal ca mulțimea permutărilor mulțimii $\{2, \ldots, n\}$ care sînt 2-ordonate și 3-ordonate, iar B_n are același cardinal ca mulțimea permutărilor mulțimii $\{3, \ldots, n\}$ care sînt 2-ordonate și 3-ordonate.

Deoarece $g(1) = F_1$ și $g(2) = F_2$ și numerele $g(n)$ verifică aceeași recurență ca numerele lui Fibonacci, deducem că $g(n) = F_n$ pentru orice $n \geqslant 1$.

(H.B. Mann, Econometrica, 13 (1945), 256.)

12.21. La fel ca la rezolvarea problemei anterioare, deducem $u_i < \min\limits_{k \geqslant 2} u_{i+k}$, deci în șir pot exista cel mult doi termeni consecutivi egali.

Să notăm cu $F(p, q)$ numărul șirurilor $u_1, \ldots, u_q$, unde $u_1, \ldots, u_q$ aparțin unei mulțimi formate din p numere distincte două cîte două, care verifică

condițiile $u_i < u_{i+2} (1 \leqslant i \leqslant n-2)$ și $u_i < u_{i+3} (1 \leqslant i \leqslant n-3)$. Obținem $f(n) = F(n, n)$.

Să presupunem că $u_1, \ldots, u_q \in \{1, \ldots, p\}$. Dacă șirul $u_1, \ldots, u_q$ începe cu 1 și $u_2 \geqslant 2$, numărul acestor șiruri este egal cu $F(p-1, q-1)$, iar dacă $u_2 = 1$, numărul acestor șiruri este egal cu $F(p-1, q-2)$, deoarece pe pozițiile 3, 4, ..., q trebuie să se găsească numere din mulțimea $\{2, \ldots, p\}$ care să verifice aceleași condiții. Dacă șirul începe cu $u_1 = k$, putem avea $u_1 = k$ și $u_2 = 1$ sau $u_1 = k$ și $u_2 = 2$, ..., sau $u_1 = k$ și $u_2 = k$ sau $u_2 \geqslant k+1$.

Deci în acest caz numărul șirurilor $u_1, \ldots, u_q$ este egal cu $F(p-k, q-1) + F(p-k, q-2)$ și în concluzie numerele $F(p, q)$ satisfac recurența:

$$F(p, q) = F(p-1, q-1) + F(p-2, q-1) + F(p-3, q-1) + \ldots$$
$$+ F(p-1, q-2) + 2F(p-2, q-2) + 3F(p-3, q-2) + \ldots$$

pentru orice $p, q \geqslant 3$.

Mai avem $F(r, 1) = r$ și $F(r, 2) = r^2$; $F(1, r) = 0$ pentru $r \geqslant 3$; $F(r, 2r) = 1$, cînd se obține șirul unic: 11 22 33 ... rr și $F(r, 2r+1) = F(r, 2r+2) = \ldots = 0$.

Mai deducem că $F(2, 3) = 2$, deoarece în acest caz există șirurile 112 și 122 care satisfac condițiile puse. Cu aceste condiții inițiale construim tabelul următor, în care primele două linii și primele două coloane se determină din condițiile inițiale.

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	4	2	1	0	0	0	0	0	0
3	3	9	9	8	3	1	0	0	0	0
4	4	16	24	31	22	13	4	1	0	0
5	5	25	50	85	88	75	42	19	5	1
6	6	36	126	–	–	288	–	–		
7	7	49								

Tabelul numerelor $F(i, j)$

Un număr $F(p, q)$ cu $p, q \geqslant 3$ se obține însumînd numerele din coloana $q-1$ cu numerele din coloana $q-2$, înmulțite respectiv cu 1, 2, 3, 4, 5, ... și situate de la linia $p-1$ în sus.

Se deduce că $f(6) = F(6, 6) = 288$.

(I. Tomescu, problemă dată la barajul III pentru O.I.M., 1979.)

18. NUMĂRAREA CLASELOR DE CONFIGURAȚII RELATIVE LA UN GRUP DE PERMUTĂRI

13.1. Considerînd axa de simetrie xx' a dreptunghiului, paralelă cu laturile AC și BD (fig. 13.1), numărul căutat de configurații este egal cu:

$$N_1 + N_2,$$

unde N_1 reprezintă numărul configurațiilor care coincid cu ele însele printr-o simetrie față de xx', iar N_2 reprezintă jumătate din numărul configurațiilor

care se corespund printr-o simetrie față de xx'. Deoarece trebuie exclusă configurația care nu conține nici o perforație, mai rezultă că:

$$N_1 + 2N_2 = 2^9 - 1 = 511.$$

Pentru a obține valoarea lui N_1 vom considera configurațiile celor 6 perforații posibile, situate de aceeași parte a axei xx' și pe axa xx', cărora le aplicăm o simetrie față de xx'.

Deci obținem $N_1 = 2^6 - 1 = 63$. Numărul căutat este $N_1 + N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + 2N_2 + N_1) = \frac{1}{2}(511 + 63) = 287$.

Dacă latura AB conține n puncte de perforare și latura AC conține m puncte de perforare, deci în total sînt mn puncte, obținem ca mai înainte

$$N_1 = 2^{m[(n+1)/2]} - 1,$$

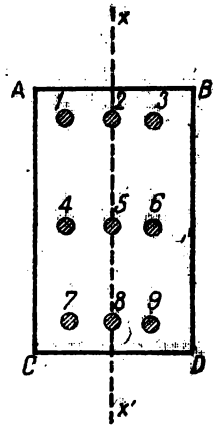


Fig. 13.1

iar $N_1 + 2N_2 = 2^{mn} - 1$. Deci numărul căutat de moduri de perforare este egal cu:

$$N_1 + N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + 2N_2 + N_1) = \frac{1}{2}(2^{mn} + 2^{m[(n+1)/2]} - 2) =$$

$$= 2^{mn-1} + 2^{m[(n+1)/2]-1} - 1.$$

(I. Tomescu, problema O:59, Gazeta matematică, 7(1979).)

13.2. Să demonstrăm mai întîi că relația: $x \sim y(G)$ este o relație de echivalență. Ea este:

— *reflexivă*: $x \sim x(G)$ deoarece $x = e(x)$, unde e este permutarea identică, $e \in G$;

— *simetrică*: $x \sim y(G)$ implică $y \sim x(G)$ deoarece există $g \in G$ astfel încît $y = g(x)$, deci $x = g^{-1}(y)$ cu $g^{-1} \in G$;

— *tranzitivă*: $x \sim y\,(G)$ și $y \sim z(G)$ implică $x \sim z(G)$ deoarece există $g_1, g_2 \in G$ astfel încît $y = g_1(x)$ și $z = g_2(y)$, deci $z = g_2 g_1(x)$ cu $g_2 g_1 \in G$.

Pentru a demonstra lema lui Burnside, vom nota cu $G_k = \{g \mid g \in G, g(k) = k\}$ mulțimea permutărilor care lasă fix elementul k.

Pentru orice $k = 1, \ldots, n$ mulțimea G_k este un subgrup al lui G, deoarece dacă $f, g \in G_k$ obținem $fg \in G_k$ pentru că $fg(k) = f(k) = k$. Mulțimile G_k sînt nevide, deoarece permutarea identică verifică $e(k) = k$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$.

Notînd cu O_k orbita grupului G care conține elementul k și cu G_k subgrupul lui G care îl lasă pe k invariat, vom demonstra că

$$|G_k| \cdot |O_k| = |G|.$$

Într-adevăr, deoarece G_k este un subgrup al lui G, putem considera mulțimea cît G/G_k ale cărei clase sînt mulțimile de forma $G_k a = \{ga \mid g \in G_k\}$, care formează o partiție a mulțimii G și al căror număr este egal cu $|G/G_k| = |G|/|G_k|$.

Vom demonstra că acest număr este egal cu $|O_k|$, construind o bijecție de la O_k pe G/G_k. Să observăm că $g(i) = h(i) = k$ cu $g, h \in G$ implică $hg^{-1}(k) = h(i) = k$, adică $hg^{-1} \in G_k$ sau $h \in G_k g$.

Pentru orice element $i \in O_k$ există o permutare $g_i \in G$ astfel ca $g_i(i) = k$, deoarece $i \sim k(G)$. Vom defini bijecția $f : O_k \to G/G_k$ astfel: $f(i) = G_k g_i \in G/G_k$, unde permutarea g_i verifică relația $g_i(i) = k$.

Aplicația f este corect definită, deoarece dacă există două permutări h, $g \in G$ astfel încît $g(i) = h(i) = k$, am arătat că $h \in G_k g$, adică clasa lui h coincide cu clasa lui g sau $G_k h = G_k g$.

Aplicația f este injectivă, deoarece $i, j \in O_k$ și $i \neq j$ implică existența a două permutări $h, g \in G$ astfel încît $g(i) = h(j) = k$ și deci $hg^{-1}(k) = h(i) \neq k = h(j)$, deoarece h fiind permutare este injectivă și $i \neq j$ implică $h(i) \neq h(j)$.

Dar $hg^{-1}(k) \neq k$ semnifică $hg^{-1} \notin G_k$ sau $h \notin G_k g$ și deci $G_k g \neq G_k h$ sau $f(i) \neq f(j)$. f este și surjecție, căci clasa $G_k g$ este imaginea elementului $g^{-1}(k) = l \in O_k$, deoarece $g(l) = k$ și deci $l \sim k(G)$. Aplicația f fiind bijectivă obținem $|O_k| = |G/G_k| = |G|/|G_k|$. Să numărăm acum în două moduri diferite elementele din X invariate de permutările $g \in G$:

$$\sum_{g \in G} \lambda_1(g) = \sum_{k \in X} |G_k| = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k \in O_i} |G_k|,$$

notînd cu $O_1, \ldots, O_q$ orbitele grupului G.

Am văzut că dacă $j, k \in O_i$ avem și $|G_j| = |G_k| = \frac{|G|}{|O_i|}$, deci obținem:

$$\sum_{g \in G} \lambda_1(g) = \sum_{i=1}^{q} |O_i| \frac{|G|}{|O_i|} = q|G|, \quad \text{de unde} \quad q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(g).$$

13.3. Să notăm prin $R_1, R_2, \ldots, R_n$ rotațiile poligonului regulat în jurul centrului său, în sensul acelor de ceasornic, de unghiuri $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ..., respectiv 2π. Aceste rotații formează un grup față de compunerea rotațiilor, R_n fiind elementul neutru al grupului. Două poligoane P_1 și P_2 cu k vîrfuri sînt considerate identice dacă există o rotație R_m de unghi $\frac{2\pi m}{n}$ astfel încît:

$$P_1 = R_m(P_2).$$

Conform lemei lui Burnside din problema anterioară, numărul căutat este egal cu:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \lambda_1(R_m), \tag{1}$$

unde $\lambda_1(R_m)$ reprezintă numărul poligoanelor P cu k vîrfuri invariate de rotația R_m, adică $R_m(P) = P$. Să observăm că dacă aplicăm unui vîrf A al poligonului regulat cu n vîrfuri în mod succesiv rotația R_m, cel mai mic indice d pentru care $R_m^d(A) = A$ este $d = \frac{n}{(m, n)}$. Într-adevăr, trebuie ca $n \mid dm$ sau $\frac{n}{(m, n)} \mid d \frac{m}{(m, n)}$, de unde se deduce că numărul natural d de valoare minimă care satisface această relație este $\frac{n}{(m, n)}$, deoarece numerele $\frac{n}{(m, n)}$ și $\frac{m}{(m, n)}$ sînt prime între ele.

Dacă reprezentăm vîrfurile poligonului regulat cu n vîrfuri prin numerele $0, 1, \ldots, n-1$, rotația R_m definește o permutare a acestor numere, imaginea numărului i fiind numărul $i+m \pmod n$, considerînd vîrfurile poligonului regulat numerotate cu numerele $0, \ldots, n-1$ în sens trigonometric invers. Deci dacă poligonul P cu k vîrfuri este invariat de rotația R_m, aceasta definește o permutare a celor k vîrfuri ale lui P care admite următoarea scriere sub formă de produs de cicluri disjuncte:

$$[i_1, i_2, \ldots, i_d]\,[j_1, j_2, \ldots, j_d] \ldots [t_1, t_2, \ldots, t_d], \tag{2}$$

unde toate ciclurile au o aceeași lungime $d = \frac{n}{(m, n)}$. Rezultă că $d \mid k$ sau $n \mid k(m, n)$, iar numărul ciclurilor din (2) este egal cu $\frac{k}{d} = \frac{k(m, n)}{n}$.

Să considerăm permutarea indusă de R_m pe mulțimea X a vîrfurilor poligonului P, scrisă ca produs de cicluri fără elemente comune. Să arătăm că oricare (m, n) numere consecutive modulo n ale mulțimii $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ au proprietatea că oricare două dintre ele nu aparțin unui aceluiași ciclu al permutării induse de R_m pe X. Presupunînd contrariul, deducem că există două numere $0 \leqslant a, b \leqslant n-1$ astfel încît $0 < |a-b| \leqslant (m, n) - 1$ și care se găsesc pe un același ciclu care conține numărul c, deci există relațiile: $c + pm \equiv a \pmod n$ și $c + qm \equiv b \pmod n$, de unde se deduce:

$$a = c + pm - rn \text{ și } b = c + qm - sn$$

cu $r, s \geqslant 0$ numere întregi. Deci putem scrie:

$$|a-b| = |(p-q)m + (s-r)n| \geqslant (m, n)$$

pentru că $a \neq b$, ceea ce contrazice inegalitatea $|a-b| \leqslant (m, n) - 1$. Rezultă că printre oricare (m, n) numere consecutive (modulo n) din mulțimea $\{0, \ldots, n-1\}$ există exact $\frac{k(m, n)}{n}$ numere distincte care aparțin cîte unuia din ciclurile permutării (2) induse de R_m pe X, deoarece în caz contrar numărul de elemente din X ar fi mai mic decît $\frac{k(m, n)}{n} \cdot \frac{n}{(m, n)} = k$, ceea ce este absurd. Pentru a găsi numărul poligoanelor P cu k vîrfuri, invariate de R_m, trebuie să găsim numărul permutărilor de forma (2), unde $d = \frac{n}{(m, n)}$, care conțin $\frac{k(m, n)}{n}$ cicluri. Dacă alegem cîte un element în fiecare ciclu, permutarea (2) este unic determinată, celelalte elemente ale ciclului obținîndu-se prin adunarea repetată a lui m(modulo n) la elementul ales. Deci dacă $n \mid k(m, n)$ numărul $\lambda_1(R_m)$ este egal cu numărul de moduri de a alege $\frac{k(m, n)}{n}$ elemente dintre (m, n) elemente, adică cu:

$$f(n, k, m) = \binom{(m, n)}{\frac{k(m, n)}{n}} \tag{3}$$

Dacă n nu este un divizor al lui $k(m, n)$ obținem $\lambda_1(R_m) = 0$.

Ținînd seama de (1), numărul căutat are forma:

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{m=1 \\ n \mid k(m,\ n)}}^{n} f(n,\ k,\ m). \tag{4}$$

Folosind notația $d = \frac{n}{(m,\ n)}$, condiția $n \mid k(m,\ n)$ devine $d \mid k$ și deoarece avem și $d \mid n$, rezultă că $d \mid (n,\ k)$.

Să calculăm cîți termeni din suma (4) au o aceeași valoare, dacă îl fixăm pe d și m ia valori de la 1 la n astfel încît $k(m,\ n)$ să se dividă prin n. Notînd $e = \frac{m}{(m,\ n)}$ obținem $e \leqslant \frac{n}{(m,\ n)} = d$ și $(e,\ d) = 1$, condiția $n \mid k(m,\ n)$ fiind îndeplinită dacă $d \mid (n,\ k)$. Deci dacă îl fixăm pe d, $f(n,\ k,\ m)$ ia o aceeași valoare pentru toate numerele e prime cu d și mai mici ca d, care îl determină în mod unic pe $m = e(m,\ n) = e\frac{n}{d}$. Rezultă că numărul de poligoane convexe cu k vîrfuri care nu se obțin unul din celălalt printr-o rotație este egal cu

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid (n,\ k)} \varphi(d) \binom{n/d}{k/d},$$

unde $\varphi(d)$ este funcția lui Euler care dă numărul întregilor pozitivi mai mici ca d și primi cu d (Problema 2.3).

13.4. Procedînd ca la problema precedentă, numărul colorărilor cu k culori ale vîrfurilor poligonului regulat cu n vîrfuri care nu se obțin una din cealaltă printr-o rotație este egal cu:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \lambda_1(R_m),$$

unde $\lambda_1(R_m)$ reprezintă numărul k-colorărilor invariate de rotația R_m de unghi $\frac{2\pi m}{n}$.

Obținem în mod analog că dacă o k-colorare este invariată de rotația R_m, această rotație definește o permutare a celor n vîrfuri, care admite următoarea scriere sub formă de produs de cicluri disjuncte:

$$[i_1^1, \ldots, i_d^1]\,[i_1^2, \ldots, i_d^2] \ldots [i_1^p, \ldots, i_d^p] \tag{2}$$

unde $d = \frac{n}{(m,\ n)}$ și $p = (m,\ n)$. Fiecare ciclu din (2) este format din numere din mulțimea $\{0, \ldots, n - 1\}$ corespunzînd unor vîrfuri ale poligonului regulat colorate cu o aceeași culoare.

În plus, pentru oricare $(m,\ n)$ numere consecutive modulo n din mulțimea $\{0, \ldots, n - 1\}$, fiecare aparține cîte unui ciclu din scrierea (2). Deci numărul k-colorărilor invariate de R_m este egal cu numărul de colorări cu k culori a $(m,\ n)$ numere consecutive modulo n din $\{0, \ldots, n - 1\}$, adică cu numărul funcțiilor:

$$g : \{1, \ldots, (m,\ n)\} \to \{1, \ldots, k\}.$$

Obținem deci $\lambda_1(R_m) = k^{(m,\,n)}$. Rezultă că numărul căutat de k-colorări este egal cu:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} k^{(n,\,m)} = \frac{1}{n}\sum_{d \mid n} \varphi(d) k^{n/d}.$$

13.5. Mai întîi vom obține formula lui g_n. Dacă reprezentarea permutării $p \in S_n$ ca produs de cicluri disjuncte conține d_k cicluri de lungime k pentru $k = 1, \ldots, n$ vom spune că p este o permutare de tipul $1^{d_1}2^{d_2} \ldots n^{d_n}$, unde $d_1 + 2d_2 + \ldots + nd_n = n$.

Să presupunem că graful neorientat $G = (X, U)$ are mulțimea vîrfurilor $X = \{1, \ldots, n\}$. Orice permutare p din S_n poate fi considerată o permutare în mulțimea grafurilor G, definind $p(G) = (X, p(U))$, unde $p(U) = \{[p(i), p(j)] \mid [i, j] \in U\}$. Mai întîi vom determina numărul $d(p)$ al grafurilor neorientate G cu n vîrfuri, astfel încît $p(G) = G$, adică numărul punctelor fixe ale permutării p. Fie G un graf astfel încît $p(G) = G$ și să presupunem că p este de tipul $1^{d_1}2^{d_2} \ldots n^{d_n}$.

Graful G poate fi partiționat în subgrafurile $G_1, G_2, \ldots$, astfel încît două vîrfuri i și j aparțin unui aceluiași subgraf dacă și numai dacă i și j aparțin unui aceluiași ciclu al lui p. Printre subgrafurile $G_1, G_2, \ldots$ există d_1 care conțin un singur vîrf, d_2 care conțin cîte două vîrfuri ș.a.m.d.
Să presupunem că $\{1, 2, \ldots, k\}$ și $\{k + 1, k + 2, \ldots, k + l\}$ sînt mulțimile vîrfurilor pentru două din aceste subgrafuri, G_1 și G_2. Putem presupune că permutarea p conține ciclurile $[1, \ldots, k]$ și $[k + 1, \ldots, k + l]$. Cele $[k/2]$ muchii posibile dintre vîrful 1 și vîrfurile 2, 3, ..., $[k/2] + 1$ din graful G_1 determină în mod unic existența celorlalte muchii din G_1, din condiția $p(G) = G$.

De asemenea, cele (k, l) muchii posibile între vîrful 1 și vîrfurile $k + i$, unde $i = 1, \ldots, (k, l)$, determină în mod unic existența sau neexistența celorlalte muchii care unesc vîrfurile din G_1 de vîrfurile din G_2 din condiția $p(G) = G$. Deci dacă $p(G) = G$, putem alege în mod arbitrar existența unui număr de muchii egal cu:

$$G_d = \sum_{k=1}^{n} (k, k)\binom{d_k}{2} + \sum_{k<l} (k, l) d_k d_l + \sum_{k \text{ impar}} \frac{1}{2} d_k (k - 1) + \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{2} k d_k =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k,\,l=1}^{n} (k, l) d_k d_l - \sum_{k \text{ impar}} d_k\right).$$

Deci $d(p) = 2^{G_d}$, de unde rezultă a), deoarece numărul permutărilor de tipul $1^{d_1}2^{d_2} \ldots n^{d_n}$ este egal cu $n!/N_d$, iar $|S_n| = n!$.

Pentru a obține b) se procedează analog, ținînd seama că două vîrfuri x și y pot fi: neadiacente, poate exista arcul (x, y) sau arcul (y, x) sau ambele arce (x, y) și (y, x), deci 4 posibilități. În plus, în expresia lui G_d suma $\sum_{k \text{ par}} \frac{1}{2} k d_k$ trebuie înlocuită prin $\sum_{k \text{ par}} \frac{1}{2}(k - 2) d_k$, deoarece pentru două vîrfuri u, v ale unui ciclu par de lungime egală cu k, situate la o distanță maximă, egală cu $k/2$, avem numai două posibilități: sau u și v sînt neadiacente, sau u și v

sînt legate prin ambele arce (u, v) și (v, u), deoarece existența unui singur arc ar contrazice invarianța grafului G la permutarea p. Deci aplicînd formula lui Burnside pentru calculul numărului d_n, la numărător apare expresia:

$$4^{G_d - \sum_{k \text{ par}} d_k} \cdot 2^{\sum_{k \text{ par}} d_k} = 2^{D_d},$$

de unde se deduce b).

Formula pentru c_n se deduce în mod analog, ținînd seama că există trei posibilități de a lega prin arce două vîrfuri oarecare. În cazul grafurilor-turneu, dacă permutarea p care invariază graful G conține un ciclu de lungime pară, fie $[i_1, i_2, \ldots, i_{2k}]$, să presupunem că G conține arcul (i_1, i_{k+1}). Deoarece $p(G) = G$, rezultă că G conține și arcele (i_2, i_{k+2}), (i_3, i_{k+3}), ..., (i_{k+1}, i_1). Dar existența ambelor arce (i_1, i_{k+1}) și (i_{k+1}, i_1) contrazice definiția unui graf-turneu, deci în acest caz obținem $d(p) = 0$. În caz contrar, dacă $p(G) = G$, putem orienta arbitrar numai

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} d_k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} (k, k)\binom{d_k}{2} + \sum_{k<l} (k, l) d_k d_l =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k,l=1}^{n} (k, l) d_k d_l - \sum_{k=1}^{n} d_k\right) = T_d$$

arce, orientările arcelor rămase fiind unic determinate de orientările acestor arce, iar numerele $d_1, d_3, d_5, \ldots$ verifică (3).

Valorile numerelor g_n, d_n și t_n pînă la $n = 7$ sînt trecute în tabelul următor.

n	g_n	d_n	t_n
1	1	1	1
2	2	3	1
3	4	16	2
4	11	218	4
5	34	9 608	12
6	156	1 540 944	56
7	1 044	882 033 440	456

13.6. Relația $f_1 \sim f_2$ este o echivalență, deoarece ea este:

— *reflexivă*: $f \sim f$ pentru că $f = fe$, unde e este permutarea identică și $e \in G$;

— *simetrică*: $f_1 \sim f_2$ implică $f_2 \sim f_1$, deoarece există $g \in G$ astfel ca $f_1 g = f_2$, deci $f_2 g^{-1} = f_1$ și $g^{-1} \in G$;

— *tranzitivă*: $f_1 \sim f_2$ și $f_2 \sim f_3$ implică $f_1 \sim f_3$, deoarece $f_1 g = f_2$ și $f_2 h = f_3$ cu $g, h \in G$ implică $(f_1 g)h = f_1(gh) = f_3$, unde $gh \in G$, deoarece G este grup.

Dacă notăm cu F mulțimea celor m^n colorări $f: X \to A$, pentru orice permutare g a lui X aplicația $f \to \bar{g}(f) = fg$ este o injecție a lui F în F. Într-adevăr, $f_1 \neq f_2$ implică existența unui obiect $i \in X$ astfel ca $f_1(i) \neq f_2(i)$. Să notăm $j = g^{-1}(i)$. Atunci $f_1 g(j) = f_1(i) \neq f_2(i) = f_2 g(j)$ și deci

$f_1 g \neq f_2 g$. Aplicația $\bar{g} : F \to F$ este injectivă și cum F este finită, rezultă că această aplicație este și surjectivă, deci o bijecție. Cu alte cuvinte $\bar{g} \in S$, unde prin S am notat mulțimea permutărilor mulțimii F.

Am definit astfel o aplicație

$$\varphi : G \to S$$

prin $\varphi(g) = \bar{g}$.

Această aplicație este injectivă, deoarece dacă $g_1 \neq g_2$ există $k \in X$ astfel încît $g_1(k) \neq g_2(k)$.

Să arătăm că funcțiile $\bar{g}_1 : F \to F$ și $\bar{g}_2 : F \to F$ sînt diferite, adică există $f \in F$ astfel încît $fg_1 \neq fg_2$, ținînd seama de definiția lui $\bar{g}$. Dacă $m \geqslant 2$ există o colorare f care să coloreze în mod diferit elementele distincte $g_1(k)$ și $g_2(k)$, deoarece F este mulțimea tuturor funcțiilor $f : X \to A$.
Obținem deci $f(g_1(k)) \neq f(g_2(k))$ sau $fg_1(k) \neq fg_2(k)$, de unde rezultă că funcțiile fg_1 și fg_2 sînt diferite și φ este o injecție. Dacă $m = 1$ atunci φ nu mai este injectivă, însă în acest caz numărul de colorări este egal cu 1, cînd toate obiectele au o aceeași culoare, iar $P(G; 1, \ldots, 1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = 1$, deci proprietatea este demonstrată.

Să notăm $\bar{G} = \{\bar{g} \mid g \in G\}$. Deoarece φ este o injecție, rezultă că există o bijecție $\varphi_1 : G \to \bar{G} \subset S$ definită prin $\varphi_1(g) = \varphi(g)$ pentru orice $g \in G$, deci $|G| = |\bar{G}|$.

Mulțimea $\bar{G}$ este un subgrup al grupului S al permutărilor mulțimii F de colorări, deoarece $\bar{g}_1$ și $\bar{g}_2 \in \bar{G}$ implică $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \in \bar{G}$, căci:

$\bar{g}_1 \bar{g}_2(f) = \bar{g}_1(fg_2) = f(g_2 g_1) = g_2 g_1(f)$, deci produsul a două elemente din $\bar{G}$, de exemplu $\bar{g}_1$ și $\bar{g}_2$, este tot un element din $\bar{G}$, care corespunde produsului $g_2 g_1 \in G$. Deoarece S este un grup finit, rezultă că $\bar{G}$ este un subgrup al lui S.

Conform definiției date, două colorări f_1 și f_2 sînt echivalente dacă există $g \in G$, astfel încît $f_1 g = f_2$ sau $\bar{g}(f_1) = f_2$, deci ele aparțin unei aceleiași orbite a grupului $\bar{G}$. Deoarece clasele de echivalență coincid cu orbitele grupului $\bar{G}$, numărul de clase este egal cu numărul de orbite ale grupului $\bar{G}$. Conform teoremei lui Burnside (problema 13.2), acest număr este egal cu:

$$\frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} \lambda_1(\bar{g}),$$

unde $\lambda_1(\bar{g})$ reprezintă numărul punctelor fixe ale permutării $\bar{g}$ sau numărul colorărilor f astfel încît $\bar{g}(f) = f$ sau $fg = f$. Dar $fg = f$ implică faptul că f este constantă pentru fiecare ciclu al permutării g, deoarece în caz contrar am avea $fg \neq f$.

Deci există atîtea colorări f cu proprietatea $fg = f$, cîte aplicații există ale mulțimii ciclurilor, care conține $\lambda_1(g) + \ldots + \lambda_n(g)$ elemente, în mulțimea celor m culori, adică $m^{\lambda_1(g) + \ldots + \lambda_n(g)}$. Ținînd seama și de faptul că $|G| = |\bar{G}|$, obținem numărul de clase de echivalență egal cu:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\lambda_1(g) + \ldots + \lambda_n(g)} = P(G; m, \ldots, m).$$

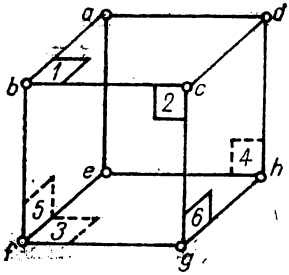


Fig. 13.2.

13.7. Să considerăm mulțimea X cu șase elemente care sînt fețele unui cub, pe care le notăm cu cifrele 1, ..., 6 ca în figura 13.2. Vîrfurile cubului le notăm cu literele a, b, c, d, e, f, g, h.

Pentru a număra cu metoda lui Pólya clasele de echivalență ale colorărilor, adică ale aplicațiilor $f : X \to A = \{a_1, ..., a_m\}$, vom determina grupul G al rotațiilor cubului, care este un subgrup al grupului permutărilor mulțimii X.

Rotațiile care invariază cubul, scrise ca produse de cicluri fără elemente comune și fără a mai scrie ciclurile de lungime unu sînt următoarele:

— în jurul axei *abcd—efgh*:
[2, 6, 4, 5]; [2, 4] [6, 5]; [2, 5, 4, 6];
— în jurul axei *bcfg—adhe*:
[1, 5, 3, 6]; [1, 3] [5, 6]; [1, 6, 3, 5];
— în jurul axei *abfe—dcgh*:
[1, 2, 3, 4]; [1, 3] [2, 4]; [1, 4, 3, 2];
— în jurul axei *a—g*: [1, 4, 5] [6, 3, 2]; [1, 5, 4] [6, 2, 3];
— în jurul axei *b—h*: [1, 5, 2] [6, 4, 3]; [1, 2, 5] [6, 3, 4];
— în jurul axei *c—e*: [1, 2, 6] [3, 4, 5]; [1, 6, 2] [3, 5, 4];
— în jurul axei *d—f*: [1, 6, 4] [3, 5, 2]; [1, 4, 6] [3, 2, 5];
— în jurul axei *ab—hg*: [1, 5] [3, 6] [2, 4];
— în jurul axei *bc—eh*: [1, 2] [3, 4] [5, 6];
— în jurul axei *cd—ef*: [1, 6] [3, 5] [2, 4];
— în jurul axei *ad—fg*: [1, 4] [2, 3] [5, 6];
— în jurul axei *bf—dh*: [2, 5] [6, 4] [1, 3];
— în jurul axei *cg—de*: [2, 6] [5, 4] [1, 3].

Rotația în jurul axei *bcfg—adhe* înseamnă rotația în jurul axei determinate de centrele pătratelor *bcfg* și *adhe*, rotația în jurul axei *ab—hg* este rotația în jurul axei determinate de mijloacele muchiilor *ab* și *hg* etc. Deoarece în mod obișnuit ciclurile de lungime unu nu se mai scriu, permutarea [2, 6, 4, 5] este de fapt [1] [3] [2, 6, 4, 5], permutarea [2, 4] [6, 5] este [1] [3] [2, 4] [6, 5] etc.

Împreună cu permutarea identică $e = [1]\,[2]\,[3]\,[4]\,[5]\,[6]$ se obține un grup G cu 24 de permutări, scrise ca produse de cicluri, deci polinomul indicator de cicluri al grupului rotațiilor cubului este:

$$P(G;\ x_1, ..., x_6) = \frac{1}{24}\,(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Folosind teorema lui Pólya din problema 13.6, obținem numărul de moduri de colorare cu m culori a fețelor unui cub, egal cu:

$$P(G;\ m, ..., m) = \frac{1}{24}\,(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2).$$

13.8. Am văzut la rezolvarea problemei 13.3 că rotația R_m de unghi $\frac{2\pi m}{n}$ a poligonului regulat în jurul centrului său se scrie ca produs de (n, m) cicluri avînd toate o aceeași lungime egală cu $d = \frac{n}{(m,n)}$:

$$[i_1, i_2, \ldots, i_d]\,[j_1, j_2, \ldots, j_d] \ldots [t_1, t_2, \ldots, t_d],$$

unde numerele $i_1, \ldots, i_d, j_1, \ldots, j_d, \ldots, t_1, \ldots, t_d$ sînt numerele $0, 1, \ldots, n-1$ care reprezintă vîrfurile poligonului regulat.

Deci polinomul indicator de cicluri este egal cu

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_{n/(n,m)}^{(n,m)} = \frac{1}{n}\sum_{d \mid n} x_d^{n/d} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ (m,n) = \frac{n}{d}}} 1 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{d \mid n} \varphi(d) x_d^{n/d},$$ deoarece dacă notăm $e = \frac{m}{(m, n)}$ condițiile $m \leqslant n$ și $(m, n) = \frac{n}{d}$ sînt îndeplinite dacă și numai dacă $e \leqslant d$ și $(e, d) = 1$.

Aplicînd teorema lui Pólya găsim numărul de colorări cu k culori ale vîrfurilor unui poligon regulat cu n vîrfuri, care nu se obțin una din cealaltă printr-o rotație, egal cu $\frac{1}{n}\sum_{d \mid n} \varphi(d) k^{n/d}$.

În general, dacă G este un grup finit cu p elemente, să considerăm reprezentarea sa ca un grup de permutări, definind pentru orice $a \in G$:

$$a(x) = xa,$$

pentru orice $x \in G$.

Deci a devine o permutare a mulțimii G care se descompune în $\frac{p}{k}$ cicluri de lungime egală cu k, unde k este ordinul elementului a în G. Într-adevăr, $xa^m = x$ dacă și numai dacă $a^m = 1$.

Procedînd analog ca mai înainte găsim polinomul indicator de cicluri al grupului G egal cu

$$\frac{1}{|G|}\sum_{d \mid p} x_d^{p/d}\, \varphi(G, d),$$

unde $p = |G|$ și $\varphi(G, d)$ este numărul elementelor de ordinul d ale grupului G. Pentru a rezolva problema 13.1 să observăm că grupul rotațiilor în jurul axei xx' care invariază dreptunghiul $ABCD$, este format din permutările:

$$G = \{e = [1]\,[2]\,[3]\,[4]\,[5]\,[6]\,[7]\,[8]\,[9] \text{ și } [2]\,[5]\,[8]\,[1, 3]\,[4, 6]\,[7, 9]\},$$

folosind notațiile din figura 13.1.

Polinomul indicator de cicluri este deci:

$$P(G; x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^9 + x_1^3 x_2^3).$$

Numărul de posibilități de perforare este egal cu numărul de scheme de colorare cu 2 culori, mai puțin cazul cînd nu există nici o perforație pe tichet, adică cu:

$$P(G;\ 2,\ 2) - 1 = \frac{1}{2}(2^9 + 2^6) - 1 = 287.$$

Dacă ar exista de exemplu două tipuri de perforații, de diametre diferite, numărul de moduri de perforare a unui bilet ar fi egal, conform teoremei lui Pólya, cu:

$$P(G;\ 3,\ 3) - 1 = \frac{1}{2}(3^9 + 3^6) - 1 = 10\,205.$$

14. PROBLEME DE TIP RAMSEY

14.1. Să considerăm graful din figura 14.1, pentru care toate muchiile au o lungime egală cu unitatea.

Dacă presupunem că proprietatea nu are loc, să considerăm că A este colorat cu culoarea a, B cu culoarea b, D cu culoarea c, deci F are culoarea a. Analog deducem că G are culoarea a, deci am obținut două puncte F și G situate la distanța 1 care sînt colorate cu o aceeași culoare, ceea ce contrazice ipoteza.

14.2. Să presupunem că cele două culori sînt roșu și albastru. Pentru orice colorare vor exista două puncte M și N de aceeași culoare, fie roșu. Dacă mijlocul P al segmentului MN este roșu, am găsit trei puncte coliniare echidistante de aceeași culoare. În caz contrar, să presupunem că P este albastru. Dacă simetricul N_1 al lui N față de M este roșu, punctele N_1, M, N sînt roșii. Dacă N_1 este albastru, vom considera simetricul M_1 al lui M față de N. Dacă M_1 este roșu, punctele căutate sînt M, N, M_1. În caz contrar M_1 este albastru și deci N_1, P, M_1 sînt trei puncte coliniare și echidistante albastre.

Deci oricum am colora punctele planului cu roșu și cu albastru, vor exista trei puncte coliniare și echidistante de aceeași culoare, să spunem roșu. Să notăm aceste puncte cu A, B, C. Construim triunghiul echilateral AFC astfel încît B, E, D să fie mijloacele laturilor (fig. 14.2). Dacă F este roșu, AFC este triunghiul căutat. În caz contrar F este albastru. Dacă D și E sînt albastre,

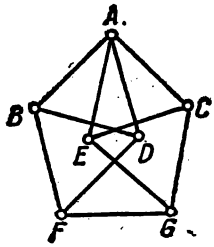


Fig. 14.1

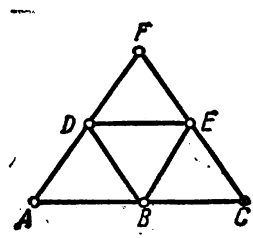


Fig. 14.2

triunghiul echilateral DEF are vîrfurile albastre și problema este rezolvată. În caz contrar, cel puțin unul din punctele D și E este roșu. Să presupunem că D este roșu, deci triunghiul ABD are proprietățile cerute. Pentru a arăta că există colorări cu 2 culori ale punctelor planului pentru care nici un triunghi echilateral de latură 1 nu are vîrfurile de aceeași culoare, vom considera planul raportat la un sistem ortogonal de axe xOy. Dreptele $y = \frac{\sqrt{3}}{2} k$ cu k întreg partiționează planul într-o rețea de benzi paralele.

Vom considera că banda mărginită de dreptele $\frac{\sqrt{3}}{2} k$ și $\frac{\sqrt{3}}{2} (k + 1)$ conține toate punctele dreptei $\frac{\sqrt{3}}{2} k$ și nu conține nici un punct al dreptei $\frac{\sqrt{3}}{2} (k + 1)$. Vom colora acum punctele planului cu roșu și cu albastru, astfel încît toate punctele unei benzi să aibă aceeași culoare, iar oricare două benzi vecine să fie de culori diferite.

Deoarece fiecare bandă are lățimea de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, egală cu înălțimea unui triunghi echilateral de latură 1, rezultă că orice triunghi echilateral de latură 1 are vîrfurile în două benzi vecine, deci nu are vîrfurile de aceeași culoare.

14.3. Dacă toate punctele planului au aceeași culoare, proprietatea este evidentă. În caz contrar, vor exista două puncte A, B la distanța 2, colorate diferit. Într-adevăr, oricare două puncte ale planului care au culori diferite pot fi unite printr-o linie poligonală cu toate laturile de lungime 2 și una din aceste laturi trebuie să aibă extremitățile de culori diferite. În figura 14.3 presupunem că

$$AC = CB = AD = DC = AE = EC = 1$$

și

$$DE = BD = BE = \sqrt{3}.$$

Fie A de culoare roșie, B de culoare albastră. Putem presupune că C este roșu, în caz contrar făcînd raționamentul pentru simetricele punctelor D și E față de mediatoarea segmentului AB. Dacă D sau E este roșu, obținem un triunghi echilateral monocromatic de latură 1. Dacă D și E sînt albastre, triunghiul echilateral BED are toate vîrfurile albastre și latura egală cu $\sqrt{3}$.

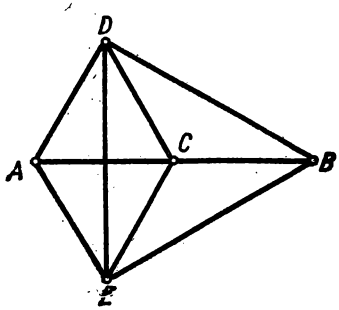


Fig. 14.3

14.4. Să notăm $E(a, b) = ab(a - b)(a + b) = a^3b - ab^3$. Dacă unul din numerele a sau b este nul obținem că $E(a, b) = 0$, care este multiplu de 10. Deoarece $E(-a, b) = E(a, -b) = -E(a, b)$ și $E(-a, -b) = E(a, b)$, putem deci considera numai cazul cînd cele trei numere sînt întregi și pozitive.

Pentru orice a și b se deduce imediat că $E(a, b)$ este un număr par, deoarece dacă a și b sînt ambele impare, atît suma cît și diferența lor sînt ambele pare.

Mai rămîne să arătăm că din orice trei numere pozitive diferite între ele,

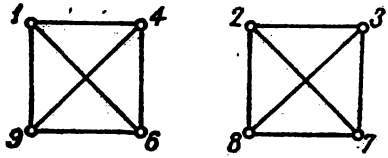


Fig. 14.4

există două distincte a și b, astfel încît $E(a, b)$ să fie multiplu de 5. Dacă unul din cele trei numere este multiplu de 5, proprietatea este imediată.

Să presupunem contrariul, deci ultima cifră a celor trei numere aparține mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Vom arăta că oricum am alege trei numere distincte din această mulțime, există două cu suma sau diferența multiplu de 5.

Să considerăm graful cu 8 vîrfuri din figura 14.4, pentru care două vîrfuri i și j sînt adiacente dacă și numai dacă $i + j$ sau $i - j$ este multiplu de 5. Acest graf constă din două subgrafuri complete, $C_1 = \{1, 4, 6, 9\}$ și $C_2 = \{2, 3, 7, 8\}$. Deci oricum am alege trei vîrfuri distincte ale acestui graf, există cel puțin două care fac parte dintr-o aceeași componentă conexă a lui G, care au deci suma sau diferența multiplu de 5, ceea ce demonstrează proprietatea.

(I. Tomescu, problemă dată la barajul II pentru O.I.M., 1980.)

14.5. Vom arăta că orice șir de numere $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ conține fie un subșir crescător cu cel puțin $m + 1$ termeni, fie un subșir descrescător cu cel puțin $n + 1$ termeni.

Să presupunem prin reducere la absurd, că orice subșir crescător are cel mult m termeni și orice subșir descrescător are cel mult n termeni.

Să presupunem prin reducere la absurd, că orice subșir crescător are cel mult m termeni și orice subșir descrescător are cel mult n termeni.

Pentru fiecare termen a_i definim numerele c_i (respectiv d_i) ca fiind numărul de termeni dintr-un cel mai lung subșir crescător (descrescător) care începe cu a_i. Aplicația care asociază fiecărui termen a_i perechea ordonată (c_i, d_i) este injectivă. Într-adevăr, fie $i < j$ și $a_i \leqslant a_j$. În acest caz obținem $c_i \geqslant c_j + 1$, deci $c_i \neq c_j$ sau $(c_i, d_i) \neq (c_j, d_j)$. Dacă $a_i \geqslant a_j$ avem $d_i \geqslant d_j + 1$, adică $d_i \neq d_j$ și deci $(c_i, d_i) \neq (c_j, d_j)$. Dar aceasta implică faptul că numărul elementelor din șirul dat este mai mic sau egal cu numărul elementelor din produsul cartezian $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, adică $mn + 1 \leqslant mn$, contradicție.

14.6. Să notăm cu $t(x)$ lungimea maximă a unui șir $x = a_1 < a_2 < \ldots$ care verifică $f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \ldots$ Deoarece $f(1) = 1$ obținem $\max t(x) = t(1)$. Trebuie să demonstrăm că $t(1) \geqslant n$. Vom folosi inducția după n. Pentru $n = 1$ proprietatea este imediată, deoarece $t(1) = 1$. Să pesupunem că proprietatea are loc pentru orice număr $m \leqslant n - 1$ și să arătăm că $t(1) \geqslant n$. În aceste condiții, să demonstrăm mai întîi că dacă $t(x) \geqslant t(1) - k$, atunci rezultă $f(x) \leqslant 2^k$ pentru $k = 0, \ldots, t(1) - 1$.

Să presupunem prin reducere la absurd că $f(x) > 2^k$ și $t(x) \geqslant t(1) - k$. Din condiția $1 \leqslant f(i) \leqslant i$ rezultă $x > 2^k$ și $k < n - 1$.

Fie $x = a_1 < \ldots < a_{t(x)}$ și $f(a_1) \leqslant \ldots \leqslant f(a_{t(x)})$.

Conform ipotezei de inducție, există un șir $1 \leqslant b_1 < \ldots < b_{k+1} \leqslant 2^k$ cu $f(b_1) \leqslant \ldots \leqslant f(b_{k+1})$, deoarece $k + 1 \leqslant n - 1$.

Deci putem scrie:

$$f(b_1) \leqslant f(b_2) \leqslant \ldots \leqslant f(b_{k+1}) \leqslant b_{k+1} \leqslant 2^k < f(a_1) \leqslant \ldots \leqslant f(a_{t(x)}),$$

deci $t(1) \geqslant t(x) + k + 1$, ceea ce contrazice inegalitatea $t(x) \geqslant t(1) - k$.

Acum să observăm că dacă $t(x) = t(y)$ și $x \neq y$ obținem $f(x) \neq f(y)$. Într-adevăr, dacă de exemplu $x < y$ atunci $f(x) > f(y)$, deoarece în caz contrar am avea $t(x) > t(y)$.

Deoarece $t(x) \geqslant t(1) - k$ implică $f(x) \leqslant 2^k$, ținînd seama și de observația anterioară, obținem $|\{x \mid t(x) = t(1) - k\}| \leqslant 2^k$ pentru $0 \leqslant k \leqslant t(1) - 1$.

Numărul elementelor domeniului lui f fiind egal cu 2^{n-1}, putem scrie:

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{t(1)-1} |\{x \mid t(x) = t(1) - k\}| \leqslant \sum_{k=0}^{t(1)-1} 2^k = 2^{t(1)} - 1.$$

Deci $t(1) \geqslant n$.

Pentru a arăta că 2^{n-1} este cea mai bună valoare posibilă pentru această proprietate, să definim funcția g cu valori întregi pe mulțimea $\{1, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ prin egalitatea:

$$g(2^k + p) = 2^k - p \quad (k = 0, \ldots, n - 2;\ 0 \leqslant p \leqslant 2^k - 1).$$

Obținem $g(i) \leqslant i$ pentru $i = 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$ și valorile lui g formează $n - 1$ intervale de valori strict descrescătoare. Dacă $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_t \leqslant 2^{n-1} - 1$ și $f(a_1) \leqslant \ldots \leqslant f(a_t)$, două valori $f(a_i)$ și $f(a_j)$ cu $i \neq j$ nu pot aparține unui același interval, deci $t \leqslant n - 1$.

(E. Harzheim, Publ. Math. Debrecen, 14(1967), 45—51.)

14.7. Dacă acoperirea convexă a celor 9 puncte (cel mai mic poligon convex care conține în interior sau pe laturi cele 9 puncte) are cel puțin 5 vîrfuri, proprietatea este imediată.

Să analizăm cazurile rămase, cînd acoperirea convexă este patrulater sau triunghi.

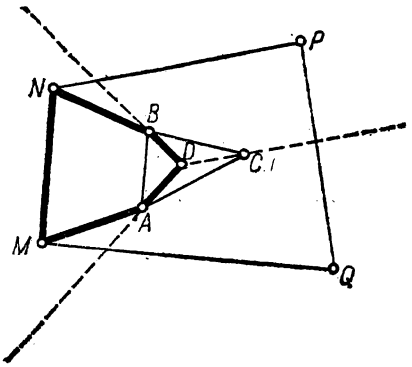


Fig. 14.5

a) Să presupunem că acoperirea convexă este patrulaterul $MNPQ$ (fig. 14.5). Dacă celelalte 5 puncte rămase formează un pentagon convex, demonstrația este încheiată. În caz contrar, există 4 puncte care nu formează un patrulater convex. Fie D punctul interior triunghiului ABC. Dintre unghiurile ADB, BDC, CDA, există unul care conține două vîrfuri ale patrulaterului, de exemplu M și N. Am obținut pentagonul convex $MNBDA$.

b) Dacă acoperirea convexă a celor 9 puncte este triunghiul ABC, vom analiza alte două subcazuri:

1) Acoperirea convexă a celor 6 puncte rămase este un patrulater $MNPQ$. Fie U, V celelalte două puncte în interiorul patrulaterului. Dacă dreapta UV intersectează două muchii adiacente ale lui $MNPQ$ obținem un pentagon convex (fig. 14.6).

Să presupunem că UV intersectează muchiile opuse MN și PQ. Semidreptele UM, UN, VQ, VP împart exteriorul patrulaterului $MNPQ$ în 4 regiuni. Dacă regiunea delimitată de dreptele UN, NP, VP sau regiunea delimitată de dreptele UM, MQ, VQ conține cel puțin unul din punctele A, B, C, obținem un pentagon convex (fig. 14.6). În caz contrar, una din regiunile delimitate de semidreptele UN, UM sau VP și VQ conține două dintre punctele A, B, C, cînd găsim un pentagon convex cu vîrfurile în aceste puncte. Dreapta AB

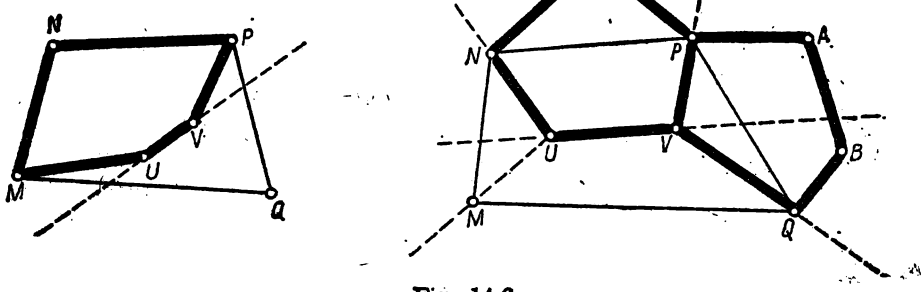


Fig. 14.6

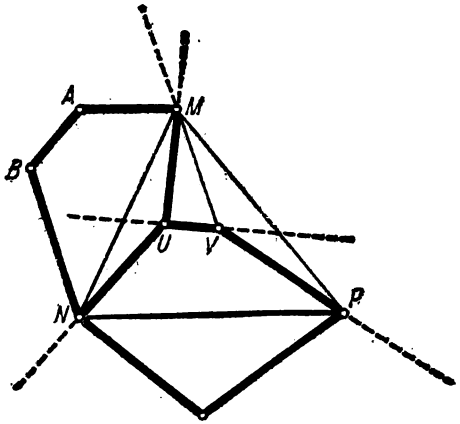


Fig. 14.7

nu mai taie segmentele VP, VQ deoarece acoperirea convexă a celor 9 puncte este triunghiul ABC.

2) Dacă acoperirea convexă a celor 6 puncte interioare triunghiului ABC este un alt triunghi MNP, fie U, V două din punctele rămase, interioare triunghiului MNP (fig. 14.7).

Să presupunem că dreapta UV intersectează segmentele MN și MP. Dacă unul din unghiurile MUN și MVP conține cel puțin două din punctele A, B, C găsim un pentagon convex ca în figura 14.7, deoarece conform ipotezei, acoperirea convexă a celor 9 puncte este triunghiul ABC.

În caz contrar, cel puțin unul din punctele A, B, C se găsește în regiunea mărginită de segmentul UV și de semidreptele UN și VP, ceea ce produce din nou un pentagon convex desenat cu linii îngroșate în figura 14.7.

S-a formulat conjectura că oricum am alege $2^{m-2}+1$ puncte în plan, astfel încît oricare trei nu sînt coliniare, există printre acestea m puncte care sînt vîrfurile unui poligon convex. Problema rezolvată demonstrează adevărul acestei afirmații pentru $m = 5$. S-a demonstrat de asemenea că se pot alege 2^{m-2} puncte în plan, oricare trei necoliniare, astfel încît oricare m dintre ele să nu formeze un poligon convex.

14.8. Să presupunem prin reducere la absurd, că există o colorare a muchiilor grafului G care nu induce triunghiuri avînd laturile de aceeași culoare și care colorează cu culori diferite muchiile ciclului C_n.

Vor exista deci două muchii vecine ale lui C_n care au culori diferite, de exemplu fie $[A_1, A_2]$ roșie și $[A_2, A_3]$ albastră.

Să considerăm un vîrf oarecare B_j al ciclului C_m. Putem presupune de exemplu că muchia $[B_j, A_2]$ este roșie. Deoarece nu apar triunghiuri monocromatice, rezultă că muchia $[A_1, B_j]$ este albastră.

Fie B_{j+1} un vîrf legat printr-o muchie de B_j în ciclul C_m (luînd $B_{m+1} = B_1$). Dacă muchia $[B_{j+1}, A_2]$ este tot roșie, rezultă că muchia $[B_{j+1}, A_1]$ este albastră, deci oricare ar fi culoarea muchiei $[B_j, B_{j+1}]$, roșu sau albastru, unul din

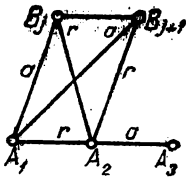


Fig. 14.8

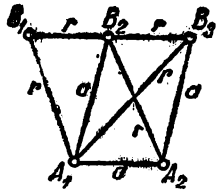


Fig. 14.9

triunghiurile $B_jB_{j+1}A_1$ sau $B_jB_{j+1}A_2$ este monocromatic (vezi fig. 14.8), ceea ce contrazice ipoteza.

Deci dacă muchia $[B_j, A_2]$ este colorată cu roșu, atunci muchia $[B_{j+1}, A_2]$ este colorată cu albastru. Analog, dacă muchia $[B_j, A_2]$ era colorată cu albastru, găseam că muchia $[B_{j+1}, A_2]$ trebuia să fie colorată cu roșu, înlocuind în raționamentul făcut vîrful A_1 cu vîrful A_3. Deci parcurgînd ciclul C_m plecînd din vîrful B_j, cu muchia $[B_j, A_2]$ colorată cu roșu și trecînd prin vîrfuri vecine, ne reîntoarcem în B_j ajungînd la concluzia că muchia $[B_j, A_2]$ trebuie să fie colorată cu albastru, deoarece m este impar. Am ajuns deci la o contradicție, ceea ce demonstrează că toate muchiile ciclului C_n au o aceeași culoare. În mod analog, deoarece și n este impar, găsim că și toate muchiile ciclului C_m trebuie să fie colorate cu o aceeași culoare.

Trebuie să mai arătăm că cele două culori ale muchiilor ciclurilor C_n și C_m coincid.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că există o colorare fără triunghiuri monocromatice, cu proprietatea că toate muchiile ciclului C_n sînt albastre și toate muchiile ciclului C_m sînt roșii.

Să presupunem, fără a restrînge generalitatea, că muchia $[A_1, B_1]$ este roșie (în caz contrar schimbăm culorile roșu și albastru între ele) (fig. 14.9).

Din inexistența triunghiurilor monocromatice rezultă că $[A_1, B_2]$ este albastră, $[A_2, B_2]$ este roșie, $[A_2, B_3]$ este albastră și deci $[A_1, B_3]$ este roșie. Luînd acum în locul vîrfului B_1 pe B_3 și repetînd același raționament, găsim că pentru oricare două vîrfuri vecine B_j și B_{j+1} ale ciclului C_m culorile muchiilor $[A_1, B_j]$ și $[A_1, B_{j+1}]$ sînt diferite. Dar această concluzie este contradictorie, deoarece ciclul C_m este impar.

Rezultă că cele $m+n$ muchii ale ciclurilor C_m și C_n sînt colorate cu o aceeași culoare. Pentru $m = n = 5$ problema a fost propusă la cea de a XXI-a ediție a O.I.M. de la Londra din anul 1979.

14.9. Vom demonstra proprietatea prin inducție după $p+q$. Pentru $p = 1$ sau $q = 1$ afirmația este imediată. Să presupunem acum $p, q > 1$. Pentru un vîrf x al grafului complet cu n_0 vîrfuri colorat cu două culori, vom nota prin $d_r(x)$ numărul muchiilor roșii care au o extremitate în x și prin $d_a(x)$ numărul muchiilor albastre care au o extremitate în x.

Deoarece $d_r(x) + d_a(x) = n_0 - 1 = \binom{p+q}{p} - 1 = \binom{p+q-1}{p-1} + \binom{p+q-1}{p} - 1$, obținem fie că $d_r(x) \geq \binom{p+q-1}{p-1}$ sau $d_a(x) \geq \binom{p+q-1}{p}$.

Să presupunem de exemplu că are loc prima inegalitate și fie G subgraful complet indus de vîrfurile legate prin muchii roșii de x. (A II-a inegalitate se tratează analog).

Deoarece G are cel puțin $\binom{p+q-1}{p-1}$ vîrfuri și are muchiile colorate cu roșu și cu albastru, conform ipotezei de inducție G conține fie un subgraf complet cu p vîrfuri cu toate muchiile roșii, fie un subgraf complet cu $q+1$ vîrfuri cu toate muchiile albastre. În al II-lea caz proprietatea este demonstrată, iar în primul caz G conține un subgraf complet cu mulțimea vîrfurilor H și $|H| = p$, cu toate muchiile roșii. Însă în acest caz $H \cup \{x\}$ este un subgraf complet cu $p+1$ vîrfuri cu toate muchiile roșii și demonstrația este încheiată. Este clar că $R(p, q) = R(q, p)$ și $R(p, 2) = p$. Singurele valori cunoscute netriviale ale numerelor $R(p, q)$ cu $p, q \geqslant 3$ sînt trecute în tabelul următor, unde $\frac{a}{b}$ semnifică faptul că se cunosc numai marginea inferioară, egală cu a și marginea superioară, egală cu b.

p \ q	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	$\frac{27}{30}$	$\frac{36}{37}$
4	9	18	$\frac{25}{28}$	$\frac{34}{45}$			
5	14	$\frac{25}{28}$	$\frac{38}{55}$	$\frac{38}{94}$			
6	18	$\frac{34}{45}$	$\frac{38}{94}$	$\frac{102}{178}$			
7	23						
8	$\frac{27}{30}$						
9	$\frac{36}{37}$						

14.10. Dacă reprezentăm gratul complet cu 5 vîrfuri K_5 printr-un pentagon regulat care are desenate toate diagonalele, să colorăm cu roșu laturile pentagonului și cu albastru diagonalele pentagonului. În acest mod nu apare nici un triunghi monocromatic, deci $R(3, 3) \geqslant 6$.

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, deci egalitatea cerută, mai rămîne să arătăm că orice colorare cu roșu sau cu albastru a muchiilor lui K_6 va produce un triunghi monocromatic.

Fie x un vîrf al lui K_6. Din x pornesc 5 muchii, deci cel puțin 3 dintre acestea au aceeași culoare, fie roșu. Deci există 3 vîrfuri a_1, a_2, a_3 care se leagă prin muchii roșii de x. Dacă una din muchiile dintre a_1, a_2, a_3, fie $[a_1, a_2]$ este roșie, atunci se formează un triunghi roșu x, a_1, a_2. În caz contrar triunghiul cu vîrfurile în a_1, a_2, a_3 are toate muchiile albastre.

Deci orice colorare cu două culori a muchiilor lui K_6 conține un triunghi monocromatic.

14.11. Marginea superioară se obține ținînd seama de problema 14.9. Într-adevăr, am văzut că există inegalitatea

$$R(k, k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1}$$

pentru $p = q = k - 1$.

Însă $$\binom{2k-2}{k-1} = \frac{2(2k-3)}{k-1}\binom{2k-4}{k-2} < 4\binom{2k-4}{k-2} \tag{1}$$

Pentru $k = 2$ obținem:

$$\binom{2k-2}{k-1} = 2 = 2^{2k-3}.$$

Presupunînd că

$$\binom{2k-2}{k-1} \leqslant 2^{2k-3} \tag{2}$$

pentru orice $2 \leqslant k \leqslant p$, ținînd seama de (1) rezultă că:

$$\binom{2p}{p} < 4\binom{2p-2}{p-1} \leqslant 4 \cdot 2^{2p-3} = 2^{2p-1},$$

deci (2) este adevărată pentru orice $k \geqslant 2$. Pentru a obține marginea inferioară, putem presupune că indicele $k \geqslant 4$. Într-adevăr, pentru $k = 2$ obținem $R(2, 2) = 2 = 2^{k/2}$ și pentru $k = 3$ găsim $R(3, 3) = 6 > 2\sqrt{2}$, conform problemei 14.10.

Să notăm $n = \{2^{k/2}\}$, adică cel mai mic întreg mai mare sau egal cu $2^{k/2}$. Fie X mulțimea celor $\binom{n}{2}$ muchii ale grafului complet K_n și $E = \{E_1, \ldots, E_m\}$ familia de submulțimi ale lui X definite astfel: E_i este familia muchiilor unui subgraf complet cu k vîrfuri al lui K_n. Deoarece există $\binom{n}{k}$ subgrafuri complete cu k vîrfuri ale lui K_n, rezultă că $m = \binom{n}{k}$. Obținem de asemenea $r = |E_i| = \binom{k}{2}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, deoarece K_k are $\binom{k}{2}$ muchii.

Putem colora elementele lui X cu 2 culori astfel încît nici o submulțime din familia E să nu aibă elementele colorate cu o aceeași culoare dacă și numai dacă muchiile grafului complet K_n pot fi colorate cu două culori, astfel încît să nu apară nici un subgraf complet cu k vîrfuri monocromatic, conform definițiilor date.

Deci $n < R(k, k)$ dacă putem colora elementele lui X cu 2 culori astfel încît nici o submulțime din familia E să nu fie monocromatică. Conform problemei 4.24, acest lucru are loc pentru $m \leqslant 2^{r-1}$ sau:

$$\binom{n}{k} \leqslant 2^{\binom{k}{2}-1}. \tag{3}$$

Inegalitatea (3) este adevărată, deoarece $\binom{n}{k} < \frac{(n-1)^k}{2^{k-1}}$ pentru orice $k \geqslant 3$ și $n - 1 < 2^{k/2}$, deci putem scrie:

$$\binom{n}{k} < \frac{2^{k^2/2}}{2^{k-1}} = 2^{k^2/2-k+1} \leqslant 2^{\binom{k}{2}-1},$$

deoarece $\binom{k}{2} - 1 - (k^2/2 - k + 1) = \frac{k}{2} - 2 \geqslant 0$ în ipoteza $k \geqslant 4$.

Deoarece (3) este verificată, rezultă că

$$R(k, k) > n \geqslant 2^{k/2}.$$

14.12. Problema 14.9 ne arată că:

$$R(a_1, a_2) = R_2(a_1, a_2) \leqslant \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1},$$

ceea ce constituie primul pas al unei demonstrații prin inducție după k.

Fie $k \geqslant 3$ și să presupunem că numerele $R_{k-1}(b_1, \ldots, b_{k-1})$ există pentru orice valori $b_1, \ldots, b_{k-1} \geqslant 1$.

Vom arăta că:

$$R_k(a_1, \ldots, a_k) \leqslant R_{k-1}(a_1, \ldots, a_{k-2}, R_2(a_{k-1}, a_k)).$$

Pentru aceasta, fie G graful complet cu $R_{k-1}(a_1, \ldots, a_{k-2}, R_2(a_{k-1}, a_k))$ vîrfuri și să colorăm într-un mod oarecare muchiile sale cu culorile $c_1, \ldots, c_k$. Să recolorăm pentru moment muchiile cu culorile c_{k-1} și c_k cu o nouă culoare d.

Conform ipotezei de inducție, există fie un indice i, $1 \leqslant i \leqslant k-2$ astfel încît graful G conține un subgraf complet cu a_i vîrfuri cu toate muchiile de culoarea c_i (în care caz proprietatea este demonstrată), fie G conține un subgraf complet G_1 cu $R_2(a_{k-1}, a_k)$ vîrfuri cu toate muchiile cu culoarea d. Pentru graful G_1 înlocuim culoarea d cu culorile c_{k-1} sau c_k existente inițial pentru muchiile lui G. Din definiția numerelor lui Ramsey $R_2(a_{k-1}, a_k)$ rezultă că G_1 (deci G) conține fie un subgraf complet cu a_{k-1} vîrfuri cu toate muchiile de culoarea c_{k-1}, fie un subgraf complet cu a_k vîrfuri cu toate muchiile de culoarea c_k.

14.13. Să notăm că $[k!\ e] = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k!}{j!}\right] = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!}$.

Vom face demonstrația prin inducție după k.

Pentru $k = 2$ problema 14.10 ne arată că $R_2(3, 3) = 6$, deci obținem egalitate.

Fie x un vîrf oarecare al unui graf complet G cu $[k!\ e] + 1$ vîrfuri, ale cărui muchii au fost colorate cu culorile $c_1, \ldots, c_k$.

Vîrful x este deci extremitate pentru $[k!\ e]$ muchii ale lui G.

Deoarece $[k!\ e] = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} = 1 + k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{j!} = 1 + k[(k-1)!\ e]$,
rezultă că din cele $[k!\ e]$ muchii cu o extremitate în x vor exista cel puțin $1 + [(k-1)!e]$ muchii cu o aceeași culoare, fie c_1. Să notăm cu X mulțimea vîrfurilor unite cu x prin muchii de culoarea c_1. Dacă X conține două vîrfuri legate printr-o muchie de culoarea c_1, aceste două vîrfuri împreună cu x formează un triunghi monocromatic cu laturile de culoarea c_1 și proprietatea este demonstrată.

În caz contrar X induce un subgraf complet G_1 cu $1 + [(k-1)!e]$ vîrfuri al lui G, ale cărui muchii au fost colorate cu $k-1$ culori. Conform ipotezei de inducție, G_1(deci G) conține un triunghi monocromatic, ale cărui laturi au toate una dintre culorile $c_2, \ldots, c_k$ și inegalitatea este demonstrată.

Obținem $R_3(3, 3, 3) \leqslant [3!e] + 1 = 17$. Pentru a demonstra inegalitatea contrară, trebuie să găsim o colorare cu 3 culori a muchiilor grafului complet K_{16}, care nu conține triunghiuri monocromatice.

Pentru aceasta fie $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mulțimea vîrfurilor unui pentagon P și X mulțimea vîrfurilor grafului K_{16}. Notăm prin Y familia celor 16 submulțimi de cardinal par ale lui M (mulțimea vidă, 10 submulțimi cu 2 elemente și 5 submulțimi cu 4 elemente). Dacă notăm cu $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ diferența simetrică a mulțimilor A și B, este clar că dacă $A, B \in Y$ și $A \neq B$, atunci $A \Delta B$ este o submulțime a lui M cu 2 sau cu 4 elemente. Fie f o bijecție oarecare de la X pe Y.

Vom colora muchiile lui K_{16} în modul următor:

Dacă $a, b \in X$ și $a \neq b$ vom colora muchia $[a, b]$ astfel: cu culoarea c_1 dacă $f(a) \Delta f(b)$ este o latură a lui P; cu culoarea c_2 dacă $f(a) \Delta f(b)$ este o diagonală a lui P; cu culoarea c_3 dacă $|f(a) \Delta f(b)| = 4$.

Trebuie să demonstrăm că nu apare nici un triunghi monocromatic.

Să presupunem prin reducere la absurd că ar apare un triunghi cu laturile colorate cu culoarea c_1, avînd vîrfurile a, b, c. Obținem deci că $f(a) \Delta f(b)$, $f(a) \Delta f(c)$ și $f(b) \Delta f(c)$ sînt laturi ale poligonului P. Dar $(f(a) \Delta f(b)) \Delta (f(b) \Delta f(c)) = f(a) \Delta f(c)$, deci $f(a) \Delta f(c)$ nu poate fi latură a poligonului P. Într-adevăr, dacă laturile $f(a) \Delta f(b)$ și $f(b) \Delta f(c)$ au un vîrf comun, atunci diferența lor simetrică este o diagonală a pentagonului P, deci latura $[a, c]$ are culoarea c_2, iar dacă nu au nici un vîrf comun, atunci diferența lor simetrică are cardinalul 4, deci latura $[a, c]$ are culoarea c_3, contradicție. Analog se procedează dacă triunghiul presupus monocromatic are laturile colorate cu culorile c_2 sau c_3.

14.14. Dacă se notează cu n_k numărul maxim de vîrfuri ale unui graf complet care admite o colorare cu k culori a muchiilor sale, fără să apară triunghiuri monocromatice, vom arăta că $n_k \geqslant 2n_{k-1}$ în modul următor:

Se consideră două copii ale unui graf complet cu n_{k-1} vîrfuri, cu muchiile colorate cu culorile $c_1, \ldots, c_{k-1}$, astfel încît să nu apară triunghiuri monocro-

matice și se colorează cu o nouă culoare c_k toate muchiile care unesc perechile de vîrfuri care aparțin celor două copii ale grafului complet cu n_{k-1} vîrfuri. Se obține astfel un graf complet cu $2n_{k-1}$ vîrfuri cu muchiile colorate cu k culori, care nu conține triunghiuri monocromatice, ceea ce justifică inegalitatea $n_k \geqslant 2n_{k-1}$. Deoarece $n_1 = 2$, rezultă $R_k(3) \geqslant n_k + 1 \geqslant 2^k + 1$. (R.E. Greenwood, A.M. Gleason, Canadian J. Math., 7(1955), 9—20.)

14.15. Deoarece $n \geqslant k!e$, din problema 14.13 rezultă că dacă colorăm cu k culori muchiile grafului complet K_{n+1} va apare un triunghi monocromatic. Să notăm cu A_i mulțimea numerelor naturale din clasa i pentru $i = 1, 2, \ldots, k$.

Dacă notăm vîrfurile lui K_{n+1} cu numerele $1, 2, \ldots, n+1$, să colorăm muchia $[i, j]$ cu culoarea p dacă $|i - j| \in A_p$. Dacă triunghiul monocromatic are vîrfurile i, j, k, atunci $x = |i - j|$, $y = |j - k|$, $z = |i - k|$ aparțin unei aceleiași clase. Presupunînd de exemplu că $i < j < k$ obținem $x + y = z$, ceea ce demonstrează proprietatea. (I. Schur, Jahresb. Deutschen Math. — Ver., 25 (1916), 114.)

Funcția lui Schur se definește astfel:

$S(k) = \max \{r \mid \{1, 2, \ldots, r\}$ poate fi partiționată în k submulțimi, eventual vide, cu proprietatea că nici una dintre ele nu conține numerele x, y, z cu $x + y = z\}$.

Rezultatul demonstrat ne arată că $S(k) \leqslant [k!e] - 1$. Singurele valori cunoscute ale funcției lui Schur sînt următoarele: $S(1) = 1$, $S(2) = 4$, $S(3) = 13$, $S(4) = 44$, ultima valoare fiind obținută în 1961 cu ajutorul unui calculator.

14.16. Alegem $n_0(k) = [k!e]$. Dacă submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ sînt colorate cu k culori, vom colora muchia $[i, j]$ (unde $1 \leqslant i < j \leqslant n + 1$) a grafului complet K_{n+1} cu vîrfurile $1, 2, \ldots, n+1$, cu aceeași culoare cu submulțimea $\{i, \ldots, j - 1\}$. Conform problemei 14.13, K_{n+1} conține un triunghi monocromatic.

Să presupunem că vîrfurile acestui triunghi sînt p, q, r, unde $1 \leqslant p < q < r \leqslant n + 1$. Rezultă că $X = \{p, \ldots, q - 1\}$, $Y = \{q, \ldots, r - 1\}$ și $X \cup Y = \{p, \ldots, r - 1\}$ au aceeași culoare.

14.17. Vom demonstra proprietatea prin inducție după r. Fie $r = 2$ și să notăm vîrfurile lui K_∞ prin $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ și prin $r(x_i)$ să notăm numărul muchiilor roșii incidente cu x_i, dacă cele 2 culori sînt roșu și albastru. Vom studia două cazuri:

I. Există o infinitate numărabilă de vîrfuri $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$, care verifică $r(x_{i_j}) < \infty$. Vom defini prin inducție vîrfurile $y_1, y_2, \ldots$, ale subgrafului complet infinit monocromatic în modul următor: Notăm $y_1 = x_{i_1}$; y_2 este primul vîrf dintre vîrfurile x_{i_j} care nu este unit cu y_1 printr-o muchie roșie, deci care este unit cu y_1 printr-o muchie albastră. Va exista un astfel de vîrf y_2,

deoarece există numai un număr finit de muchii roșii incidente cu y_1. Vom defini vîrful y_3 ca fiind primul vîrf dintre vîrfurile de indice superior lui y_2 care sînt unite prin muchii albastre și cu y_1 și cu y_2 ș.a.m.d. Procesul poate continua indefinit, deoarece mulțimea vîrfurilor x_{i_j} cu $j \geqslant 1$ este infinită și fiecare astfel de vîrf este incident cu un număr finit de muchii roșii. Rezultă că subgraful complet infinit generat de mulțimea de vîrfuri $\{y_1, y_2, \ldots\}$, are toate muchiile albastre.

II. Să presupunem că I nu are loc și să facem ipoteza că graful K_∞ nu conține subgrafuri complete infinite cu toate muchiile albastre. Fie $X_1 = \{x \mid r(x) = \infty\}$. Rezultă că X_1 este o mulțime infinită. Să alegem $y_1 \in X_1$ și să notăm prin $X_1' \subset X_1$ submulțimea de vîrfuri din X_1 care sînt unite cu y_1 printr-o muchie roșie. Deoarece I nu are loc, rezultă că vîrfurile lui K_∞ care nu aparțin lui X_1 sînt în număr finit, deci X_1' este o mulțime infinită. Să notăm cu $X_2 \subset X_1'$ submulțimea de vîrfuri din X_1' care sînt incidente cu o infinitate de muchii roșii care au ambele extremități în X_1'. Dacă X_2 este finită, rezultă că $X_1' \setminus X_2$ este o mulțime infinită de vîrfuri care sînt incidente cu un număr finit de muchii roșii care au ambele extremități în X_1'. Deci în acest caz ne găsim în situația I pentru subgraful complet infinit cu mulțimea de vîrfuri X_1', găsind un subgraf complet infinit cu toate muchiile albastre al lui K_∞, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Deci X_2 este infinită și vom alege $y_2 \in X_2$.

Am văzut că presupunerea că $X_1' \setminus X_2$ este o mulțime infinită ne conduce la o contradicție cu ipoteza făcută, deci $X_1' \setminus X_2$ este o mulțime finită. Deoarece y_2 este incident cu o infinitate de muchii roșii cu ambele extremități în X_1' și $X_1' \setminus X_2$ este finită, rezultă că submulțimea $X_2' \subset X_2$ a vîrfurilor din X_2 care sînt unite cu y_2 printr-o muchie roșie este infinită. Vom nota cu $X_3 \subset X_2'$ submulțimea de vîrfuri din X_2' care sînt incidente cu o infinitate de muchii roșii cu ambele extremități în X_2'. Analog ca mai înainte obținem că X_3 este o mulțime infinită și alegem $y_3 \in X_3$ etc.

Obținem prin inducție un subgraf complet infinit generat de mulțimea de vîrfuri $\{y_1, y_2, \ldots\}$ cu toate muchiile roșii, ceea ce demonstrează afirmația pentru $r = 2$.

Să presupunem că proprietatea are loc pentru orice colorare a muchiilor lui K_∞ cu cel mult $r - 1$ culori și să considerăm o colorare a lui K_∞ cu r culori: $c_1, c_2, \ldots, c_r$, unde $r \geqslant 3$. Vom recolora muchiile care au culorile c_{r-1} și c_r cu o nouă culoare c_{r+1}. Conform ipotezei de inducție pentru $r - 1$ culori, există un subgraf complet infinit monocromatic. Dacă culoarea muchiilor acestui graf este una dintre culorile $c_1, \ldots, c_{r-2}$ proprietatea este demonstrată. În caz contrar, există un subgraf complet infinit cu toate muchiile avînd culoarea c_{r+1}. Recolorînd muchiile acestui graf cu culorile inițiale c_{r-1} și c_r și aplicînd proprietatea pentru două culori, obținem un subgraf complet infinit cu toate muchiile avînd o aceeași culoare (c_{r-1} sau c_r). Proprietatea este demonstrată pentru orice r.

14.18. Să notăm vîrfurile grafului complet K_∞ cu numerele din mulțimea $\{1, 2, \ldots\}$. Vom colora muchia $[i, j]$ cu roșu dacă $i < j$ și $a_i < a_j$, cu galben dacă $i < j$ și $a_i > a_j$ și cu albastru dacă $i < j$ și $a_i = a_j$. Aplicînd proprietatea din problema precedentă, deducem existența unui subgraf complet infinit monocromatic. Dacă culoarea acestuia este roșu deducem existența unui subșir infinit strict crescător, pentru galben găsim un subșir infinit strict descrescător și pentru albastru obținem un subșir infinit constant.

14.19. Vom demonstra mai întîi că oricum am considera o mulțime infinită A de puncte în plan, va exista o submulțime infinită A_1 a lui A de puncte coliniare sau o submulțime infinită A_2 a lui A de puncte cu proprietatea că oricare trei puncte nu sînt coliniare.

Într-adevăr, vom considera toate dreptele determinate de perechi de puncte din A. Dacă una din ele conține o infinitate de puncte din A, proprietatea este demonstrată. În caz contrar, orice dreaptă determinată de 2 puncte din A conține un număr finit de puncte din A.

În acest caz vom face următoarea construcție:

Fie x_1 și x_2 două puncte din A. Vom nota cu B_1 mulțimea obținută din A prin eliminarea tuturor punctelor dreptei x_1x_2, inclusiv a lui x_1 și x_2. Rezultă că B_1 este o mulțime infinită. Fie $x_3 \in B_1$. Vom nota cu B_2 mulțimea obținută din B_1 prin eliminarea tuturor punctelor dreptelor x_3x_1 și x_3x_2 care aparțin lui A. Rezultă că B_2 conține o infinitate de puncte. Dacă am obținut mulțimea de puncte $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ cu proprietatea că oricare două nu sînt coliniare și dacă B_{r-1} este mulțimea infinită a punctelor care aparțin mulțimii A și nu se găsesc pe nici una din dreptele determinate de perechile de puncte din $\{x_1, \ldots, x_r\}$, vom considera $x_{r+1} \in B_{r-1}$. Notăm cu B_r submulțimea infinită a punctelor lui B_{r-1} care nu se găsesc pe nici una din dreptele $x_1x_{r+1}, \ldots, x_rx_{r+1}$ și așa mai departe.

Am demonstrat deci prin inducție că această construcție poate continua indefinit, deci A conține o submulțime infinită $\{x_1, x_2, \ldots\}$ de puncte cu proprietatea că oricare trei nu sînt coliniare.

Fie acum A o mulțime infinită de puncte în spațiu. Dacă există o dreaptă determinată de o pereche de puncte din A care conține o infinitate de puncte din A, am găsit o mulțime A_1 din cazul a). În caz contrar, dacă există trei puncte din A care determină un plan care conține o infinitate de puncte din A, aplicînd rezultatul demonstrat anterior găsim o mulțime A_2 din cazul b).

În caz contrar, orice pereche de puncte din A determină o dreaptă care conține numai un număr finit de puncte din A și oricare trei puncte necoliniare din A determină un plan care conține un număr finit de puncte din A.

Vom face următoarea construcție: Fie $x_1, x_2 \in A$. Eliminăm din mulțimea A toate punctele dreptei x_1x_2 și obținem o mulțime infinită B_1.

Fie $x_3 \in B_1$. Eliminăm din B_1 toate punctele planului $x_1x_2x_3$ și obținem o mulțime infinită B_2. Fie $x_4 \in B_2$. Rezultă că x_4 nu aparține planului $x_1x_2x_3$, deci nici dreptelor x_1x_2, x_1x_3 și x_2x_3. Eliminăm din B_2 toate punctele planelor $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$ și $x_2x_3x_4$ obținînd o submulțime infinită B_2 a lui A.

Dacă am obținut punctele $\{x_1, \ldots, x_r\}$ cu proprietatea că oricare patru nu sînt coplanare și o submulțime infinită B_{r-1} a lui A cu proprietatea că nu conține nici un punct din cele $\binom{r}{3}$ plane determinate de $x_1, \ldots, x_r$, fie $x_{r+1} \in B_{r-1}$. Vom defini mulțimea infinită B_r ca fiind obținută din B_{r-1} prin eliminarea tuturor punctelor determinate de x_{r+1} și cele $\binom{r}{2}$ drepte formate cu perechi de puncte din mulțimea $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Am demonstrat deci prin inducție că această construcție poate continua indefinit, deci A conține o submulțime infinită $A_3 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de puncte cu proprietatea că oricare patru nu sînt coplanare.

14.20. Să presupunem prin reducere la absurd, că proprietatea nu este adevărată. Fie cele două clase A și B. Să presupunem că $5 \in A$. Rezultă că numerele 1 și 9 nu aparțin ambele lui A. Fără a restrînge generalitatea, vom studia, pe considerente de simetrie, numai următoarele două cazuri:

I. $1 \in A$ și $9 \in B$. Deoarece 1 și 5 sînt în clasa A, rezultă că $3 \in B$; $3, 9 \in B$ implică $6 \in A$; $5, 6 \in A$ implică $4 \in B$; $3, 4 \in B$ implică $2 \in A$; $5, 6 \in A$ implică $7 \in B$ și $7, 9 \in B$ implică $8 \in A$.

Am obținut $\{2, 5, 8\} \subset A$, deci clasa A conține o progresie aritmetică cu trei termeni.

II. $1 \in B$ și $9 \in B$. Vom considera alte două cazuri:

II.1. $7 \in A$. În acest caz $5, 7 \in A$ implică $6 \in B$ și $3 \in B$. Deci $\{3, 6, 9\} \subset B$ și B conține o progresie aritmetică cu 3 termeni.

II.2. $7 \in B$. Din $7, 9 \in B$ obținem că $8 \in A$; $1, 7 \in B$ implică $4 \in A$; $4, 5 \notin A$ implică $3 \in B$ și $1, 3 \in B$ implică $2 \in A$. În acest caz am obținut iarăși o progresie aritmetică $\{2, 5, 8\} \subset A$. Proprietatea nu mai este adevărată dacă se consideră mulțimea $\{1, \ldots, 8\}$. Acest rezultat este un caz particular al unei teoreme a lui van der Waerden, care afirmă că pentru oricare doi întregi pozitivi k, t, există un număr natural notat $W(k, t)$ care este cel mai mic întreg cu proprietatea următoare: Dacă mulțimea $\{1, 2, \ldots, W(k, t)\}$ este partiționată într-un mod oarecare în k clase, există o clasă a partiției care conține o progresie aritmetică cu $t + 1$ termeni.

(Van der Waerden, B.L., Nieuw. Archief voor Wiskunde, 15(1927), 212—216.)

Se cunosc puține valori ale numerelor lui van der Waerden:

$W(1, t) = t + 1$, $W(k, 1) = k + 1$, $W(2, 2) = 9$, $W(2, 3) = 35$, $W(3, 2) = 27$, $W(4, 2) = 76$, $W(2, 4) = 178$.

(M.D. Beeler, E.P.O'Neil, Discrete Mathematics, 2, 28 (1979), 135—146.)

14.21. Vom demonstra mai întîi inegalitatea:

$$R(3, t) \leqslant R(3, t-1) + t, \tag{1}$$

raționînd apoi prin inducție după $t \geqslant 2$.

Prin definiție, există un graf G cu $R(3, t) - 1$ vîrfuri, care nu conține un triunghi (subgraful K_3), nici o mulțime independentă cu t vîrfuri. Fie x un vîrf al lui G. Deoarece G nu conține triunghiuri, oricare două vîrfuri adiacente cu x nu sînt adiacente între ele. Fie $d(x) = d$. Rezultă $d \leqslant t - 1$, deoarece G nu conține mulțimi independente cu t vîrfuri. Să notăm prin G_0 subgraful obținut din G prin suprimarea vîrfului x și a celor d vîrfuri adiacente cu x. G_0 conține deci $R(3, t) - d - 2 = p_0$ vîrfuri.

Deoarece $d \leqslant t - 1$, obținem:

$$p_0 \geqslant R(3, t) - t - 1.$$

Graful G_0 nu conține triunghiuri, deoarece nici G nu conține triunghiuri. De asemenea, G_0 nu poate conține o mulțime independentă formată din $t - 1$ vîrfuri, deoarece în caz contrar, o asemenea mulțime, împreună cu vîrful x, ar produce o mulțime formată din t vîrfuri neadiacente două cîte două în G. Deci $R(3, t-1) > p_0$, ceea ce implică (1). Vom aplica acum inducția după $t \geqslant 2$. Pentru $t = 2$ obținem $R(3, t) = 3$, în timp ce $(t^2 + 3)/2 > 3$, deci proprietatea este adevărată. Să presupunem că proprietatea are loc pentru orice $t \leqslant n - 1$, $n \geqslant 3$ și fie $t = n$. Fie n impar, deci $n = 2k + 1$. Conform inegalității (1), obținem

$$R(3, 2k+1) \leqslant R(3, 2k) + 2k + 1,$$

deci conform ipotezei de inducție deducem:

$$R(3, 2k+1) \leqslant (4k^2 + 3)/2 + 2k + 1,$$

sau

$$R(3, 2k+1) \leqslant 2k^2 + 2k + 2 = \frac{(2k+1)^2+3}{2}.$$

Deci pentru n impar proprietatea este demonstrată.

Fie acum n par, deci $n = 2k$. Aplicînd din nou (1) și ipoteza de inducție, deducem:

$$R(3, 2k) \leqslant R(3, 2k-1) + 2k \leqslant \frac{(2k-1)^2+3}{2} + 2k = 2k^2 + 2.$$

Vom termina demonstrația, arătînd că ultima inegalitate obținută pentru $R(3, 2k)$ este strictă, adică de fapt $R(3, 2k) \leqslant 2k^2 + 1 < (4k^2 + 3)/2$. Să presupunem prin reducere la absurd că există o valoare a indicelui $k \geqslant 2$, pentru care $R(3, 2k) = 2k^2 + 2$. Deci există un graf H cu $2k^2 + 1$ vîrfuri, care nu conține nici un triunghi, nici o mulțime intern stabilă cu $2k$ vîrfuri.

Dacă ar exista un vîrf y cu $d(y) \geqslant 2k$, oricare două vîrfuri adiacente cu y, neputînd fi adiacente între ele, ar rezulta că H conține mulțimi independente cu $2k$ vîrfuri, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Deci pentru orice vîrf x al lui H obținem $d(x) \leqslant 2k - 1$. Deoarece H are un număr impar de vîrfuri și suma gradelor vîrfurilor fiind un număr par, rezultă că nu toate vîrfurile lui H pot avea gradul impar, egal cu $2k - 1$. Deci H conține un vîrf z, astfel încît $d(z) = d \leqslant 2k - 2$. Să considerăm graful H_0 obținut din H prin suprimarea vîrfului z și a tuturor vîrfurilor adiacente cu z. H_0 are q_0 vîrfuri, unde

$$q_0 = 2k^2 - d \geqslant \frac{(2k-1)^2 + 3}{2} \geqslant R(3, 2k-1),$$

conform ipotezei de inducție. Deci H_0 conține fie un triunghi, fie o mulțime independentă formată din $2k - 1$ vîrfuri. Dacă H_0 conține un triunghi, rezultă că și H are aceeași proprietate. Dacă H_0 conține o mulțime independentă formată din $2k - 1$ vîrfuri, această mulțime împreună cu vîrful z va produce o mulțime independentă cu $2k$ vîrfuri a grafului H. Am ajuns astfel la o contradicție și teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1979.

2. C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.

3. C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

4. B. Bollobas, *Graph theory. An introductory course*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.

5. L. Comtet *Analyse combinatoire, I, II*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

6. L. R. Ford, jr., D.R. Fulkerson, *Flows in networks*, Princeton University Press, 1962

7. M. Hall, jr., *Combinatorial Theory*, Blaisdell Publishing Co., Waltham (Massachusetts), Toronto, London, 1967.

8. F. Harary, *Graph theory*. Addison Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1969

9. L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, Akademiai Kiado, Budapest, 1979.

10. J.W. Moon, *Counting labelled trees*, Canadian Mathematical Monographs, 1, Canadian Mathematical Congress, 1970.

11. J.W. Moon, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

12. H. Ryser, *Combinatorial mathematics*, John Wiley, New York, 1963.

13. I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura tehnică, București. 1972. Ediția engleză: *Introduction to combinatorics*, Collet's (Publishers) Ltd., London and Wellingborough, 1975.

14. N. Vilenkin, *Combinatorial mathematics for recreation*, Mir Publishers, Moscova, 1972.

CUPRINS

Dicționar de termeni folosiți în lucrare 3
Partea I/Partea a II-a 11/57
1. Identități combinatorii 11/57
2. Principiul includerii și al excluderii și formule de inversiune 17/87
3. Numerele lui Stirling, Bell, Fiboracci, Catalan 20/98
4. Probleme de combinatorica mulțimilor 26/119
5. Partiții ale unui întreg 31/140
6. Arbori 33/150
7. Paritate 36/164
8. Conexitate 37/172
9. Probleme extremale pentru grafuri și rețele de transport 40/184
10. Probleme de colorare 45/202
11. Probleme hamiltoniene 47/218
12. Permutări 49/228
13. Numărarea claselor de configurații relative la un grup de permutări 52/242
14. Probleme de tip Ramsey 54/252
Bibliografie 269

Nr. colilor de tipar: 17
Bun de tipar: 22.11.1981

Com. nr. 10 268 7119
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.

Lei 17,40